

21世纪高等院校适用教材　非数学专业

哈尔滨工业大学工科数学教学丛书

数学物理方程

哈尔滨工业大学数学系　组编

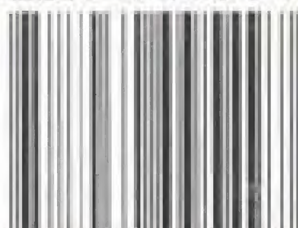
谢鸿政　杨枫林　编

科学出版社

(O-1414.0101)
责任编辑：吕 虹 方开文 封面设计：王 浩 责任校对：钟 洋

哈尔滨工业大学工科数学教学丛书

工科数学分析（上、下册）
线性代数与解析几何
概率论与数理统计
复变函数与积分变换
数学物理方程
计算方法
数学实验



ISBN 7-03-009549-9/O · 1414
定 价：28.00 元

21 世纪高等院校选用教材(非数学专业)

哈尔滨工业大学工科数学教学丛书

数 学 物 理 方 程

哈尔滨工业大学数学系　组编

谢鸿政　杨枫林　编

科 学 出 版 社

2001

内 容 简 介

本书是国家工科数学教学基地之一的哈尔滨工业大学数学系，根据数学教学改革成果而编写的系列教材之一.

本书主要内容为数学物理方程相关的背景，偏微分方程的基本概念、数学模型的建立与定解问题，特征线积分法，傅里叶级数理论，分离变量法，本征值问题，椭圆型方程边值问题，高维问题，δ函数与格林函数法、积分变换法等. 书中重点介绍了定解问题的各种基本解法，突出了应用性.

本书可作为工科各专业本科生、研究生的教材，也可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/谢鸿政，杨枫林编. -北京：科学出版社，2001

(21世纪高等院校选用教材(非数学专业))

ISBN 7-03-009549-9

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①谢… ②杨… Ⅲ. 数学物理方程-高等学校-教材 Ⅳ. O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 039772 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年8月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2001年8月第一次印刷 印张：20 1/2

印数：1—6 000 字数：366 000

定价：28.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换(新欣))

前　　言

现代科学技术的发展,使得以物理学、力学、化学等自然科学和工程技术中的问题作为主要研究对象的数学物理方程在理论和应用两方面的内容愈加丰富,并因此而不断加强其同数学其他分支的广泛、深入的联系和相互渗透,从而促进了数学科学的发展.

为适应新世纪大学教改的发展,依据工科专业的特点和要求,我们在修改原有教材的基础上,适当吸取了国内外相关教材的长处,编写出这部更加突出应用性的教学参考书.

本书主要根据各种基本定解问题及其相关解法展开讨论.在介绍有关基本概念、基本原理的同时,重点阐述解偏微分方程定解问题的重要方法和技巧.全书共十一章:第一章绪论,介绍数学物理方程有关的背景和偏微分方程的基本概念.第二章描述相应于一些物理现象的典型数学模型的建立及基本的定解问题.第三章叙述了两个自变量的二阶线性偏微分方程的分类、化简与标准型及求部分简单方程通解的方法.第四章介绍了主要用于求解双曲型方程有关问题的特征线积分法.第五章较详细地介绍了作为辅助材料与其后三章有密切联系的傅里叶级数理论(本章可略去不讲).第六章与第七章详细介绍了应用十分广泛的含边界条件的分离变量解法和相关的本征值问题与特殊函数,以及常微分方程边值问题的格林函数解法.第八章介绍了椭圆型方程的边值问题和极值原理.第九章讨论了更复杂的高维边值问题与本征函数法.第十章介绍了与解偏微分方程边值问题相关的格林函数的概念、构造和应用.第十一章介绍了傅里叶积分变换和拉普拉斯积分变换的有关概念、性质和对求解偏微分方程无界区域定解问题的应用.

对于上述内容,教师可依教学的具体情况适当加以选取.由于编者水平所限,不妥之处在所难免,希望读者指正.

编　　者

2001年2月

目　　录

第一章　绪　　论

1.1　引　　言

数学物理方程(简称数理方程)是指在物理学、力学等自然科学及工程技术中所提出的偏微分方程(有时也包含某些常微分方程、积分方程及微分积分方程).它是数学物理研究的基本内容.

早期建立的数学物理方程有根据牛顿引力理论而推导出的描述引力势的拉普拉斯方程和泊松方程.在连续介质力学中,从质量、动量、能量守恒定律出发,建立了流体力学中的纳维-斯托克斯方程组(有黏性)和欧拉方程组(无黏性)以及弹性力学中的圣维南方程组等.另外,像描述波的传播的波动方程;描述传热和扩散现象的热传导方程都是古典的数学物理方程.

自 19 世纪开始,相继出现了大量新的数学物理方程,其中最基本的有描述电磁场变化的麦克斯韦方程组,描述微观粒子的薛定谔方程,广义相对论中确定引力场的爱因斯坦方程和在基本粒子研究中有重大作用的杨-米尔斯方程等.人们在研究光辐射、中子迁移以及气体分子运动的过程中,推导出了辐射迁移方程,中子迁移方程和玻尔兹曼方程,它们都是微分积分方程.在进一步研究带电粒子在磁场中的运动时,建立了流体力学方程的耦合.而研究具有扩散现象的化学反应导致了反应扩散方程(是偏微分方程组)的建立.

对于建立的数学物理方程,需要作出各种附有具体条件而构成典型问题的解,然后根据实际测量结果来检验和修正相应的物理理论.通过求解数理方程,使人们对自然现象获得更加深刻的认识,并能预见新的现象.

数学物理方程中有许多是线性方程,与其对应的已经给出很多求准确解的方法,如特征线方法、分离变量法、格林函数法、积分变换法及复变函数法等.解有时能用各种初等函数和超越的特殊函数来表示,但这些仅限于少数较特殊的情况.更多的数学物理方程是非线性方程或方程组,其求解方法一般都很复杂,且只有少数问题有精确解.而得到准确解的有效方法之一是利用问题的对称性,例如球对称性、轴对称性与相似性(量纲分析)等来求解,这可以减少自变数(或降低维数),进而化为常微分方程去求特解.对于大量的不能获取准确解的问题,通常设法求出近似解,例如摄动法就是一个重要方法.而伴随电子计算机迅速发展起来的差分法与有限元法等数值解法是求解数学物理方

程的十分有效的方法. 近年来,与孤立子、杨-米尔斯方程等近代理论的研究密切相联,正在发展求解非线性方程的新方法.

随着现代科学和技术的进步,将会不断涌现新的数学物理方程,而其产生和应用的范围已经并且更多地超出了传统的物理学、力学、天文学等领域. 例如,在化学、生命科学、经济学等自然科学和社会科学各个领域,以及在资源勘探与开发、大型建筑与水利工程、金属冶炼工程、通信工程、新能源开发、大气物理、气象预报、航天工程、遥感技术、控制与识别、医疗诊断与材料无损探伤、遗传工程等极广泛的工程技术各个领域都涉及到数学物理方程的理论问题及其重要应用.

1.2 基本概念和定义

当一个微分方程除了含有几个自变量和未知函数外,还含有未知函数的一个或多个偏导数时,称为*偏微分方程*. 一般说来,它可以写成包含几个自变量 $x, y, \cdots$ 和这些变量的未知函数 u 及其偏导数 $u_x, u_y, \cdots, u_{xx}, u_{xy}, \cdots$ 的方程的形式

$$f(x, y, \cdots, u, u_x, u_y, \cdots, u_{xx}, u_{xy}, \cdots) = 0, \tag{1.2.1}$$

这里,方程(1.2.1)是在自变量 $x, y, \cdots$ 的 n 维空间 R^n 中的一个适当的区域 D 内进行考察的. 我们要求能找出在 D 内恒满足方程(1.2.1)的那些函数 $u = u(x, y, \cdots)$. 如果这种函数存在,那么称它们为方程(1.2.1)的解. 从这些可能的解中,我们要选出一个满足某些合适的附加条件的特解来.

例如,

$$\begin{aligned} &uu_{xy} + u_x = y, \\ &u_{xx} + 2yu_{xy} + 3xu_{yy} = 4\sin x, \\ &(u_x)^2 + (u_y)^2 = 1, \\ &u_{xx} - u_{yy} = 0 \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

都是偏微分方程. 容易验证下列两个函数:

$$u(x, y) = (x + y)^3,$$
$$u(x, y) = \sin(x - y)$$

都是(1.2.2)的最后一个方程的解.

出现在方程中的未知函数的偏导数的最高阶数称为偏微分方程的阶. 例如,方程

$$u_{xx} + 2xu_{xy} + u_{yy} = e^y$$

是一个二阶偏微分方程，而方程

$$u_{xxy} + xu_{yy} + 8u = 7y$$

是一个三阶偏微分方程.

如果一个偏微分方程对于未知函数及它的所有偏导数来说都是线性的，且方程中的系数都仅依赖于自变量，那么这样的偏微分方程就称为线性偏微分方程. 如果一个偏微分方程对未知函数的最高阶导数来说是线性的，那么就称为拟线性偏微分方程. 例如，方程

$$yu_{xx} + 2xyu_{yy} + u = 1$$

是一个二阶线性偏微分方程，而方程

$$u_xu_{xx} + xuu_y = \sin y$$

是一个二阶拟线性偏微分方程. 一个偏微分方程不是线性方程，就称为非线性偏微分方程.

在本书中，我们将主要研究二阶线性偏微分方程，因为它们在数学物理问题中经常出现. 最一般的 n 个自变量的二阶线性偏微分方程的形式为

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} B_iu_{x_i} + Fu = G, \tag{1.2.3}$$

其中不失一般性，可假设 $A_{ij} = A_{ji}$，且可假设 A_{ij}, B_i, F 和 G 都是 n 个自变量 x_i 的函数.

如果 G 恒等于零，方程称为齐次方程；否则方程就称为非齐次方程.

n 阶常微分方程的通解是依赖于 n 个任意常数的一族函数. 就偏微分方程来说，它的通解将依赖于任意函数而不是任意常数. 为了说明这件事，我们考察二阶方程

$$u_{xy} = 0.$$

如果我们把这个方程对 y 积分，而把 x 认为是固定的，就得到

$$u_x(x,y) = f(x).$$

再把 y 认为是固定的，对 x 求第二次积分，得

$$u(x,y) = g(x) + h(y),$$

其中 $g(x)$ 和 $h(y)$ 都是任意函数.

假定 u 是三个变量 x, y 和 z 的函数，那么对于方程

$$u_{yy} = 2,$$

我们可以得到通解

$$u(x,y,z) = y^2 + yf(x,z) + g(x,z).$$

其中 f 和 g 都是两个变量 x 与 z 的任意函数.

我们回想在常微分方程情况下,首先的任务是确定一个通解,然后根据给定的条件求出任意常数的值来确定特解.但是,对偏微分方程来说,从偏微分方程的通解中选出满足附加条件的一个特解,可能和求通解一样困难,甚至比求通解更困难.这是因为在偏微分方程的通解中含有任意函数;我们要从通解中确定满足附加条件的特解,不是仅仅要确定任意常数,而是要确定这些任意函数.

对于 n 阶线性齐次常微分方程来说,n 个线性无关的解的线性组合仍是一个解.不幸的是就偏微分方程来说,这样的结论一般是不成立的.这是由于每一个线性齐次偏微分方程的解空间是无限维的函数空间.例如,偏微分方程

$$u_x - u_y = 0 \tag{1.2.4}$$

经过变量变换

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y, \end{cases}$$

能化成方程

$$2u_\eta = 0,$$

它的通解是

$$u(x,y) = f(x + y),$$

其中 f 是处处可微的任意函数.由此可见下列函数:

$$\left.\begin{array}{l} (x+y)^n, \\ \sin n(x+y), \\ \cos n(x+y), \\ \exp n(x+y) \end{array}\right. \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

中的每一个函数都是方程(1.2.4)的一个解,而且这些函数显然是线性无关的.像方程(1.2.4)这样一个简单的方程就有无限多个解,它们的线性组合是否为解是要进一步加以讨论的.因此在研究偏微分方程时,必须克服这种困难.于是,我们一般宁愿直接来确定满足给定的附加条件的特解.

1.3 线性算子

本节将简单地讨论在偏微分方程的理论中经常遇到的线性算子.

算子是一种数学法则,把它作用在一个函数上时,便产生另外一个函数.例如,在下列表达式中:

$$L[u] = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3},$$

$$M[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$L = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3}{\partial y^3}$与 $M = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$都称为微分算子.也有一些其他类型的算子,例如

$$P[u] = \int_a^b u(x,\tau)F(\tau,y)\mathrm{d}\tau, \quad a,b \text{ 都是常数},$$

$$Q[u] = u(x,c) + u_x(x,c), \quad c \text{ 是常数},$$

其中算子 P 是一个积分算子,而算子 Q 是一个把两个自变量 x 和 y 的函数 u 变为一个自变量 x 的函数 $Q[u]$的算子.

两个微分算子称为是等价的,是指把每一个算子作用在函数 u 上时,会产生同样的结果,记为 $A = B$.此时对函数 n 有

$$A[u] = B[u], \tag{1.3.1}$$

其中 u 必须是充分可微的函数.

两个微分算子的和定义为

$$(A + B)[u] = A[u] + B[u], \tag{1.3.2}$$

其中 u 为函数.

两个算子 A 与 B 的积是这样一个算子.它作用于函数 u 的结果与算子 A 及 B 依次作用在 u 上的结果是相同的,即

$$AB[u] = A(B[u]). \tag{1.3.3}$$

微分算子满足下列定律:

(1)加法交换律:

$$A + B = B + A; \tag{1.3.4}$$

(2)加法结合律:

$$(A + B) + C = A + (B + C); \tag{1.3.5}$$

(3)乘法结合律:

$$(AB)C = A(BC); \tag{1.3.6}$$

(4)乘法对加法的分配律:

$$A(B + C) = AB + AC; \tag{1.3.7}$$

(5)乘法交换律:

$$AB = BA, \tag{1.3.8}$$

但乘法交换律仅对常系数微分算子成立.

【例 1.2.1】 设 $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - y\frac{\partial}{\partial y}$,

因而

$$B[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$AB[u]=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}-y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+x\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}-xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-x\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$BA[u]=\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial x^2}+x\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}-y\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}-xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

于是,当 $x\neq 0$ 时,$AB[u]\neq BA[u]$.

我们定义具有下列性质的算子为线性算子:

(1)常数 c 可以从算子中提取出来:

$$L[cu]=cL[u].$$

(2)算子作用于两个函数之和所得的结果等于算子分别作用于两个函数所得结果之和:

$$L[u+v]=L[u]+L[v].$$

性质(1)与(2)可以组合起来表示为

$$L[au+bv]=aL[u]+bL[v], \tag{1.3.9}$$

其中 a 与 b 都是常数.

现在让我们来考察二阶线性偏微分方程.就两个自变量来说,这种方程的形式为

$$A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x$$
$$+E(x,y)u_y+F(x,y)u=G(x,y), \tag{1.3.10}$$

其中系数 A,B,C,D,E,F 都是变量 x 与 y 的函数,$G(x,y)$是非齐次项.

如果取线性微分算子 L 为

$$L=A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}+D\frac{\partial}{\partial x}+E\frac{\partial}{\partial y}+F,$$

那么偏微分方程(1.3.10)可以写成下列形式:

$$L[u]=G. \tag{1.3.11}$$

我们经常略去方括号,把上式简写为

$$Lu=G.$$

习　题

1. 对于下列各偏微分方程,试确定它是线性的、拟线性的还是非线性的.如果是线性

的，说明它是齐次的还是非齐次的，并确定它的阶：

(a) $u_{xx} + xu_y = y$;

(b) $uu_x - 2xyu_y = 0$;

(c) $u_x^2 + uu_y = 1$;

(d) $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$;

(e) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = \sin x$;

(f) $u_{xxx} + u_{xyy} + \lg u = 0$;

(g) $u_{xx}^2 + u_x^2 + \sin u = e^y$.

2. 验证下面两个函数：

$$u(x,y) = x^2 - y^2,$$
$$u(x,y) = e^x \sin y$$

都是方程

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

的解.

3. 证明 $u = f(xy)$ 满足方程

$$xu_x - yu_y = 0,$$

其中 f 是任意的可微函数，并由此验证函数 $\sin(xy)$，$\cos(xy)$，$\lg(xy)$，e^{xy} 和 $(xy)^3$ 都是解.

4. 证明 $u = f(x)g(y)$ 满足方程

$$uu_{xy} - u_x u_y = 0,$$

其中 f 和 g 都是任意的二次可微函数.

5. 试确定下列方程的通解：

$$u_{yy} + u = 0.$$

6. 令 $u_x = v$，求下列方程的通解：

$$u_{xy} + u_x = 0.$$

7. 设解的形式为 $u(x,y) = f(\lambda x + y)$，其中 λ 是一个待定的参数.求下列方程的通解：

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$$

第二章　数学模型与定解问题

2.1　典型方程

三类基本的二阶偏微分方程是:

(a) 波动方程

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0;$$

(b) 热传导方程

$$u_t - k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0;$$

(c) 拉普拉斯方程

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

许多数学物理问题都可归结为解偏微分方程的问题,特别是可归结为解上面所列举的三个偏微分方程的问题.我们将开始研究这些方程,首先仔细考察表示这些物理问题的数学模型.

2.2　弦的振动

在数学物理中最重要的问题之一是拉紧的弦的振动问题.由于它较简单,且经常出现在许多数学物理的分支中,所以在偏微分方程理论中把它作为一个典型的例子.

让我们考察一长为 l 的两端固定的拉紧的弦.我们的问题是要确定弦的运动方程,用它来描述在给定初始扰动后任一时刻 t 的弦的位移 $u(x,t)$.

为了能得出一个较简单的方程,我们作下面的一些假设:

(1) 弦是柔软与有弹性的,即它不能抵抗弯矩,因此在任何时刻弦的张力总是沿着弦的切线方向;

(2) 弦的每一段都不伸长,因此根据胡克(Hooke)定律,张力是常数;

(3) 弦的重量与其张力相比很小;

(4) 弦的偏移与其长度相比很小;

(5) 位移后的弦在任一点上的斜率与 1 相比很小;

(6) 弦只有横振动.

我们考察弦上一微小元素.设 T 是如图 2.1 所示的两端点上的张力.作

用在弦的这一微小元素上的垂直方向的力是

$$T\sin\beta - T\sin\alpha.$$



图 2.1

根据牛顿第二运动定律,合力等于质量乘以加速度.因此

$$T\sin\beta - T\sin\alpha = \rho\Delta s u_{tt}, \tag{2.2.1}$$

其中 ρ 是弦的密度,Δs 是这一小段位移后的弦的弧长.因为位移后的弦的斜率很小,所以有

$$\Delta s \approx \Delta x.$$

因为角 α 和 β 都很小,所以

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha, \quad \sin\beta \approx \tan\beta.$$

于是等式(2.2.1)变成

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}u_{tt}. \tag{2.2.2}$$

但是,由微积分学我们知道,在时刻 t 有

$$\tan\alpha \approx (u_x)|_x$$

及

$$\tan\beta \approx (u_x)|_{x+\Delta x}.$$

于是等式(2.2.2)可以写成

$$\frac{1}{\Delta x}[(u_x)|_{x+\Delta x} - (u_x)|_x] = \frac{\rho}{T}u_{tt}.$$

令 Δx 趋于零取极限,得

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \tag{2.2.3}$$

其中 $c^2 = T/\rho$.方程(2.2.3)称为一维波动方程.

如果在弦的每单位长度上有外力 F 作用着,方程(2.2.3)具有下列形式:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f, \tag{2.2.4}$$

其中 $f=F/\rho$，而外力可以是压力、重力、阻力以及其他力等.

2.3　膜的振动

膜振动方程在数学物理的许多问题中出现.在我们导出膜振动方程前，像在弦振动的情形中一样，我们作下列一些简化的假设：

(1) 膜是柔软与有弹性的，即它不能抵抗弯矩，因此在任何时刻它的张力总是在膜的切平面内；

(2) 膜的每一块元素都没有伸张变形，因此根据胡克定律，张力是常数；

(3) 膜的重量与膜的张力相比很小；

(4) 膜的偏移与膜的最小直径相比很小；

(5) 位移后的膜在任一点上的斜率与 1 相比很小；

(6) 膜只有横振动.

我们考察膜的一块微小元素.因为偏移和斜率都很小，这块元素的面积近似地等于 $\Delta x\Delta y$.如果 T 是每单位长度上的张力，则作用在这块元素各边上的力是 $T\Delta x$ 和 $T\Delta y$(见图 2.2).

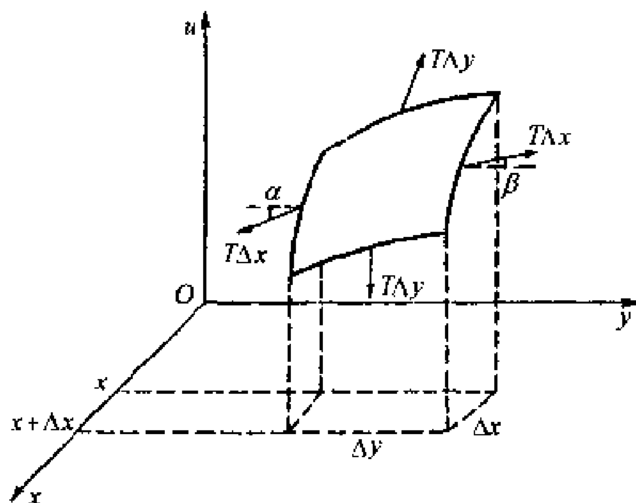


图 2.2

作用在膜的这块元素上的垂直方向的力是

$$T\Delta x\sin\beta - T\Delta x\sin\alpha + T\Delta y\sin\delta - T\Delta y\sin\gamma.$$

因为斜率很小，所以上述这些角的正弦都分别近似地等于它们的正切.于是合力变为

$$T\Delta x(\tan\beta - \tan\alpha) + T\Delta y(\tan\delta - \tan\gamma).$$

根据牛顿第二运动定律,合力等于质量乘以加速度.因此

$$T\Delta x(\tan\beta - \tan\alpha) + T\Delta y(\tan\delta - \tan\gamma) = \rho\Delta A u_{tt}, \quad (2.3.1)$$

其中 ρ 是每单位面积膜的质量,$\Delta A \approx \Delta x \Delta y$ 是这块元素的面积,u_{tt} 在所考察的区域中的某一点上取值.但由微积分学可知

$$\tan\alpha \approx u_y(x_1, y),$$
$$\tan\beta \approx u_y(x_2, y + \Delta y),$$
$$\tan\delta \approx u_x(x, y_1),$$
$$\tan\gamma \approx u_x(x + \Delta x, y_2),$$

其中 x_1 与 x_2 是 x 在 x 和 $x + \Delta x$ 之间的值,y_1 与 y_2 是 y 在 y 和 $y + \Delta y$ 之间的值.把这些值代入式(2.3.1),得

$$\begin{aligned} T\Delta x[u_y(x_2, y + \Delta y) - u_y(x_1, y)] \\ + T\Delta y[u_x(x + \Delta x, y_2) - u_x(x, y_1)] \\ = \rho\Delta x\Delta y u_{tt}. \end{aligned}$$

把上式除以 $\rho\Delta x\Delta y$,得

$$\frac{T}{\rho}\left[\frac{u_y(x_2, y + \Delta y) - u_y(x_1, y)}{\Delta y} + \frac{u_x(x + \Delta x, y_2) - u_x(x, y_1)}{\Delta x}\right] = u_{tt}. \quad (2.3.2)$$

令 $\Delta x, \Delta y$ 都趋于零取极限,得到

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad (2.3.3)$$

其中 $c^2 = T/\rho$.这个方程称为二维波动方程.

如果在膜的每单位面积上有外力 F 作用着,方程(2.3.3)就具有下列形式:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + f, \quad (2.3.4)$$

其中 $f = F/\rho$.

2.4 在弹性介质中的波

如果在一弹性介质中的一点处发生一个小扰动,那么周围的质点就会产生运动,这时介质处于应变状态之中.我们考察沿所有方向扩展的这样一种运动状态.假设介质的位移是微小的,而且我们不讨论介质作为一个整体来说的平移或旋转.

假设我们所研究的物体是均匀的和各向同性的.令 ΔV 是物体的一块微

小体积元素,且作用在这块体积元素表面上的应力是 $\tau_{xx},\tau_{yy},\tau_{zz},\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yx},\tau_{yz},\tau_{zx},\tau_{zy}$. 开头三个应力称为正应力,而其余的应力称为剪应力(见图2.3).

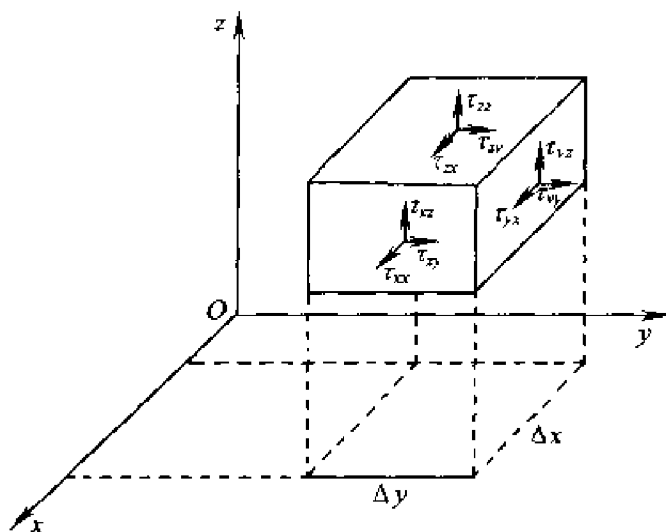


图 2.3

我们将假设应力张量 τ_{ij} 是对称的[①],即

$$\tau_{ij}=\tau_{ji},\quad i\neq j,\qquad i,j=x,y,z. \tag{2.4.1}$$

忽略体力,那么在 x 方向上作用在这块体积元素上的所有力的总和是

$$[(\tau_{xx})|_{x+\Delta x}-(\tau_{xx})|_{x}]\Delta y\Delta z+[(\tau_{xy})|_{y+\Delta y}-(\tau_{xy})|_{y}]\Delta z\Delta x$$
$$+[(\tau_{xz})|_{z+\Delta z}-(\tau_{xz})|_{z}]\Delta x\Delta y.$$

根据牛顿第二运动定律,合力等于质量乘以加速度. 于是得到

$$[(\tau_{xx})|_{x+\Delta x}-(\tau_{xx})|_{x}]\Delta y\Delta z+[(\tau_{xy})|_{y+\Delta y}-(\tau_{xy})|_{y}]\Delta z\Delta x$$
$$+[(\tau_{xz})|_{z+\Delta z}-(\tau_{xz})|_{z}]\Delta x\Delta y=\rho\Delta x\Delta y\Delta z u_{tt}, \tag{2.4.2}$$

其中 ρ 是物体的密度,u 是在 x 方向上的位移分量. 因此令 ΔV 趋于零取极限,得

$$\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2.4.3}$$

类似地可得下列两个相应于 y 方向和 z 方向的方程:

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{2.4.4}$$

---

① 即体积元素的转动平衡条件.

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}=\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{2.4.5}$$

其中 v 和 w 分别是 y 方向和 z 方向上的位移分量.

现在我们可以定义线应变为

$$\begin{cases}\varepsilon_{xx}=\dfrac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_{yz}=\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z},\\ \varepsilon_{yy}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\varepsilon_{zx}=\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x},\\ \varepsilon_{zz}=\dfrac{\partial w}{\partial z},\varepsilon_{xy}=\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y},\end{cases} \tag{2.4.6}$$

其中 $\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz}$ 表示正应变,$\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx},\varepsilon_{xy}$ 表示剪应变.

就各向同性的物体来说,广义胡克定律具有下列形式:

$$\begin{cases}\tau_{xx}=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_{xx}, & \tau_{yz}=\mu\varepsilon_{yz},\\ \tau_{yy}=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_{yy}, & \tau_{zx}=\mu\varepsilon_{zx},\\ \tau_{zz}=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_{zz}, & \tau_{xy}=\mu\varepsilon_{xy},\end{cases} \tag{2.4.7}$$

其中 $\theta=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}$,$\lambda$ 和 μ 是拉美常数.

用位移表示应力,得到

$$\begin{cases}\tau_{xx}=\lambda\theta+2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x},\\ \tau_{xy}=\mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right),\\ \tau_{xz}=\mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right).\end{cases} \tag{2.4.8}$$

对方程组(2.4.8)求微分,得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}=\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+2\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=\mu\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}+\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}.\end{cases} \tag{2.4.9}$$

把方程组(2.4.9)代入等式(2.4.3)可得

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)$$
$$+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2.4.10}$$

注意到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

并引入记号

$$\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

符号 Δ 或∇^2 称为拉普拉斯算子. 因此方程(2.4.10)变为

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\nabla^2\mu=\rho\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}. \tag{2.4.11}$$

同样可以得到下面另外两个方程:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{2.4.12}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{2.4.13}$$

把上述运动方程写成矢量形式

$$(\lambda+\mu)\text{grad div}\boldsymbol{u}+\mu\nabla^2\boldsymbol{u}=\rho\boldsymbol{u}_{tt}, \tag{2.4.14}$$

其中 $\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k},\theta=\text{div}\boldsymbol{u}$.

(i) 如果 $\text{div}\boldsymbol{u}=0$,那么一般方程变为

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u}=\rho\boldsymbol{u}_{tt}$$

或

$$\boldsymbol{u}_{tt}=c^2\nabla^2\boldsymbol{u}, \tag{2.4.15}$$

其中 $c=\sqrt{\mu/\rho}$是波的传播速度.

这是一种等体积波传播的情形,因为对以这个速度运动的波来说,体积膨胀 θ 为零. 有时这种波称为畸变波,因为波的传播速度依赖于 μ 和 ρ,而剪切弹性模量 μ 是表示体积元素的畸变与旋转特性的.

(ii) 当 $\text{curl}\boldsymbol{u}=0$ 时,由恒等式

$$\text{curl curl}\boldsymbol{u}=\text{grad div}\boldsymbol{u}-\nabla^2\boldsymbol{u}$$

得出

$$\text{grad div}\boldsymbol{u}=\nabla^2\boldsymbol{u}.$$

于是一般方程变为

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2\boldsymbol{u}=\rho\boldsymbol{u}_{tt}$$

或

$$\boldsymbol{u}_{tt}=c^2\nabla^2\boldsymbol{u}, \tag{2.4.16}$$

其中波的传播速度是

$$c=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}.$$

这是一种无旋或膨胀波传播的情形，因为 $\mathrm{curl}\boldsymbol{u}=0$ 描写无旋运动. 方程(2.4.15)与(2.4.16)称为三维波动方程

一般来说，波动方程可以写为

$$u_{tt}=c^2\nabla^2 u, \tag{2.4.17}$$

其中拉普拉斯算子可以是一维、二维或三维的. 波动方程之所以重要，是由于这类方程在许多物理问题中出现；例如，在空间中的声波，在导体中的电振动和杆的扭转振动等问题中.

2.5 在固体中的热传导

考察一闭曲面 B^* 所包围的区域 D^*，令 $u(x,y,z,t)$ 是在时刻 t 的点 (x,y,z) 处的温度. 如果温度不是常数，那么热量由高温处流向低温处. 由傅里叶定律，热流的变化率与温度梯度成正比. 因此在各向同性的物体中，热流速度是

$$\boldsymbol{v}=-K\mathrm{grad}u, \tag{2.5.1}$$

其中 K 是常数，称为物体的导热率.

设 D 是 D^* 内任一由闭曲面 B 所包围的区域，则在单位时间中流出 D 的总热量是

$$\iint_B v_n\mathrm{d}s,$$

其中 $v_n=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{v}$ 在 B 的单位外法线 $\boldsymbol{n}$ 方向上的分量. 因此利用高斯定理(即散度定理)，得

$$\begin{aligned}\iint_B v_n\mathrm{d}s &= \iiint_D \mathrm{div}(-K\mathrm{grad}u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &=-K\iiint_D \nabla^2 u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

但是在 D 内的总热量已知为

$$\iiint_D \sigma\rho u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{2.5.3}$$

其中 ρ 是物质的密度，σ 是比热. 假设求微分与求积分的运算是可以交换的，则在 D 内热量减少的变化率是

$$-\iiint_D \sigma\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{2.5.4}$$

由于在 D 内的热量减少的变化率必须等于在单位时间内流出 D 的总热量，就

得到

$$-\iiint_D \sigma\rho u_t \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -K\iiint_D \nabla^2 u \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

或

$$\iiint_D [\sigma\rho u_t - K\nabla^2 u]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0, \qquad (2.5.5)$$

其中 D 是 D^* 内的任一区域.我们假设上述积分中的被积函数是连续的.如果假定被积函数在 D 内某点 (x_0, y_0, z_0) 处不等于零,则由连续性,可得被积函数在一个包围点 (x_0, y_0, z_0) 的小区域上恒不等于零.继续用这一方式扩充到包括 D 的区域,因此积分必不等于零,与(2.5.5)式矛盾.于是被积函数处处为零,即

$$u_t = k\nabla^2 u, \qquad (2.5.6)$$

其中 $k = K/\sigma\rho$.这个方程称为*热传导方程*.

这种类型的方程出现在各种数学物理问题之中;例如,在扩散物质的浓度,在一长沟中的潮汐波的运动与电缆的传输等问题中.

2.6 引 力 势

在本节我们将导出在偏微分方程理论中最著名的一个方程——拉普拉斯方程.

如图 2.4 所示,我们考察在点 P 和 Q 处质量为 m 和 M 的两个质点.设 r 是两质点间的距离.于是根据牛顿的万有引力定律,引力与两质点质量的乘积成正比,与两质点间距离的平方成反比,因此它可表示为下列形式:

$$F = G\frac{mM}{r^2}, \qquad (2.6.1)$$

其中 G 是引力常数.

在势论中通常选择这样的力的单位使 $G=1$.于是 F 变成

$$F = \frac{mM}{r^2}. \qquad (2.6.2)$$

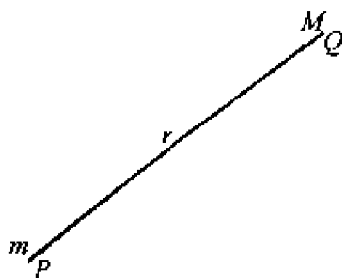


图 2.4

如果用 $\boldsymbol{r}$ 表示矢量 PQ,则在点 P 处质量为 m 的质点对点 Q 处的每单位质量的质点的作用力可写成

$$\boldsymbol{F} = \frac{-m\boldsymbol{r}}{r^3} = \nabla\left(\frac{m}{r}\right), \qquad (2.6.3)$$

它称为这个力所产生的引力场的强度.

假定一单位质量的质点受到点 P 处质量为 m 的质点的吸引,由无穷远处移动到 Q,则力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功是

$$\int_{\infty}^{r}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{\infty}^{r}\nabla\left(\frac{m}{r}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{m}{r}. \tag{2.6.4}$$

这个功的负值称为由点 P 处质点的吸引而产生的在点Q 处的势,它可表示为

$$V=-\frac{m}{r}. \tag{2.6.5}$$

因此在点 Q 处的引力场的强度是

$$\boldsymbol{F}=\nabla\left(\frac{m}{r}\right)=-\nabla V. \tag{2.6.6}$$

我们现在考察 n 个质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 的质点,它们与点 Q 的距离分别是 $r_1,r_2,\cdots,r_n$.那么由于这个质点系对点 Q 处每单位质量的质点的吸引力是

$$\boldsymbol{F}=\sum_{k=1}^{n}\nabla\frac{m_k}{r_k}=\nabla\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{r_k}. \tag{2.6.7}$$

由这些作用在单位质量的质点上的力所作的功是

$$\int_{\infty}^{r}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{r_k}=-V. \tag{2.6.8}$$

这个势满足

$$\nabla^2 V=-\nabla^2\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{r_k}=-\sum_{k=1}^{n}\nabla^2\frac{m_k}{r_k}=0,\quad r_k\neq 0. \tag{2.6.9}$$

如果在某一体积 R 内质量是连续分布的,如图 2.5 所示,那么我们可得

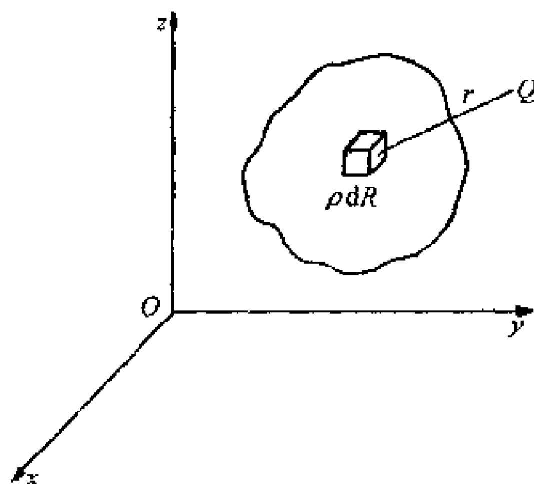


图 2.5

$$V(x,y,z) = \iiint_R \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}R, \tag{2.6.10}$$

其中 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$，且 Q 在物体外. 由此可立即得到

$$\nabla^2 V = 0. \tag{2.6.11}$$

这个方程称为*拉普拉斯方程*，也称为*势方程*. 它出现在许多物理问题之中，例如静电势、流体动力学中的势与弹性理论中的调和势等问题之中. 我们注意到当因变量与时间无关时，拉普拉斯方程可以看作是热传导方程和波动方程的特殊情形.

2.7　定解条件与定解问题

前面导出的三种典型偏微分方程都是一般物理规律的数学表示. 例如，弦振动问题导出的弦振动方程表述了一切柔软均匀细弦作微小横向振动的共同规律，所以弦振动方程又称为弦振动问题的*泛定方程*. 在推导方程的过程中，没有考虑弦的初始状态和弦所受的约束情况. 如果不是泛泛地研究弦的振动，就必须考虑弦所具有的特定条件. 因为弦的初始状态和端点的约束条件不同，产生的影响也不同，从而弦的振动也不一样. 因此对弦的振动问题而言，不仅要建立振动方程，还要列出弦所处的特定条件. 对于热传导方程和拉普拉斯方程也是同样情况. 总之，三种典型方程均统称*泛定方程*，面说明特定的初始状态的条件称为*初始条件*；说明特定的边界上约束状况的条件称为*边界条件*.

初始条件给出具体物理现象的初始状态. 例如，对于弦振动问题，初始条件是指弦在开始振动时刻的位置和速度. 如果用 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 分别表示 $t=0$ 时的初始位置和初始速度，则弦振动问题的初始条件可表示为

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2.7.1}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x). \tag{2.7.2}$$

热传导问题的初始条件是指初始时刻物体温度分布的状况. 若以 $\phi(M)$ 表示 $t=0$ 时物体内任意点 M 处的温度，则热传导问题的初始条件可表为

$$u(M,t)|_{t=0} = \varphi(M). \tag{2.7.3}$$

拉普拉斯方程是描述与时间无关的恒稳状态，因而不提初始条件.

边界条件是给出具体物理现象在边界上所处的物理情况. 依据边界条件数学表达方式的不同，一般把边界条件分成三类. 设 u 为未知函数，S 为物体的表面，则有如下三类边界条件：

(1) 第一类边界条件

第一类边界条件是直接给出 u 在边界 S 上的数值,即

$$u|_S = f. \tag{2.7.4}$$

例如,在弦振动问题上,若弦的两端是固定的,也就是说端点无位移,则其边界条件为

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0. \tag{2.7.5}$$

若弦的两端不是固定的,是按规律 $\mu_1(t),\mu_2(t)$在运动,则其边界条件为

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t). \tag{2.7.6}$$

又如在热传导问题中,当物体与外界接触的表面温度 $\varphi(x,y,z,t)$已知,则其边界条件为

$$u|_S = \varphi(x,y,z,t). \tag{2.7.7}$$

(2) 第二类边界条件

第二类边界条件是给出 u 沿 S 的外法线$\boldsymbol{n}$ 方向的方向导数,即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S = g. \tag{2.7.8}$$

例如,在弦振动问题中,弦的一端(如在 $x=l$ 处)可以在垂直于 x 轴的直线上作自由的上下滑动,且不受垂直方向的外力,我们称此端点为自由端,此点边界上的张力沿垂直于 x 轴的方向的分量为零,因此,在方程的推导中可知$T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$,即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \tag{2.7.9}$$

当该处的张力沿垂直于 x 轴方向的分量是 t 的一个已知函数$\mu(t)$时,有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \mu(t). \tag{2.7.10}$$

对于热传导问题,若物体与周围介质处于绝热状态,即在表面 S 上热量的流速始终为零,则由方程推导过程可得出边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S = 0. \tag{2.7.11}$$

当物体与外界接触的表面 S 上各单位面积在单位时间内流过的热量已知时,由傅里叶定律知,在 S 上有$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S\mathrm{d}t} = -k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$,这表明温度 u 沿外法线方向导数是已知的,故此处边界条件可表为

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \mu(x,y,z,t). \tag{2.7.12}$$

(3) 第三类边界条件

第三类边界条件是给出 u 以及$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$的线性组合在边界上的值,即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \sigma u\right)\bigg|_S = g. \tag{2.7.13}$$

例如在弦振动问题中,若端点 $x=l$ 处被弹性支撑所支承,设弹性支撑原来位置为 $u=0$,则 $u|_{x=l}$表示弹性支撑的应变,由胡克定律知,在 $x=l$ 端张力沿位移方向的分量$T\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_{x=l}$应等于$-ku|_{x=l}$,即 $T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=-ku|_{x=l}$,或写成边界条件为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u\right)\bigg|_{x=l} = 0, \tag{2.7.14}$$

其中非负常数 k 为弹性体的倔强系数,$\sigma=k/T$.

在热传导问题中,若物体内部通过边界 S 与周围的介质有热量交换,这时能测量到与物体接触处的介质的温度 u_1,一般 u_1 与物体在表面 S 上的温度u 并不相同.依据传热学的实验定律,物体从一介质流入另一介质的热量与两介质间的温度差成正比,即 $\mathrm{d}Q=h(u-u_1)\mathrm{d}S\mathrm{d}t$,其中常数 h 称为两种介质间的热交换系数,它取正值.在物体内部任取一个无限接近于边界 S 的闭曲面Γ,由于在 S 的内侧热量不能积累,因此在 Γ 上的热量流速应等于边界S上的热量流速$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S\mathrm{d}t}\bigg|_\Gamma=-k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_\Gamma$,其中 k 为传热系数.因而,当物体与外界有热交换时,相应的边界条件为$-k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_S=h(u-u_1)|_S$,即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \sigma u\right)\bigg|_S = \sigma u_1|_S,$$

其中 $\sigma=h/k$.

以上给出的边界条件都是定义在边界 S 上的已知函数,当这些函数恒为零时,相应的边界条件称为齐次的,否则称为非齐次的.

上述的初始条件和边界条件总称为*定解条件*.由泛定方程及相应的定解条件所构成的问题,称为*定解问题*.具体说,由泛定方程和初始条件构成的定解问题称为*初值问题*或*柯西*(Cauchy)*问题*;由泛定方程和边界条件构成的定解问题称为*边值问题*;而由泛定方程、初始条件及边界条件构成的定解问题称为*混合初边值问题*或简称为*混合问题*.

一个泛定方程的解的概念如同 1.1 节所述.若该方程的*通解*(即方程解的全体)中的某个解还满足方程所在的定解问题中的所有定解条件,则此解又称为是该*定解问题的解*或称为*特解*.

一个定解问题提得是否正确,必须由实践来检验.通常,需要考察看它是

否满足下述三个数学方面的要求:

(1) 解的存在性.即看所提的定解问题是否有解;

(2) 解的惟一性.即看所提的定解问题是否有惟一的解;

(3) 解的稳定性.即看定解问题的解是否关于定解条件具有连续依赖性.也就是说,当定解条件有微小变动时,引起解的变动是否也相应的足够小.若如此,则称此解是稳定的,否则称其解是不稳定的.由于定解条件一般是通过实验测得,实验结果常有误差,若解因定解条件的误差而有很大的超出允许的变动,则这种不连续依赖于定解条件的解是不能符合客观情况和实际要求的.

如果一个定解问题满足上述三个方面的要求,即它存在惟一一个稳定的解,则称此定解问题是适定的,否则称其为不适定的.通常,定解问题适定性的讨论是很困难的,本书主要讨论定解问题的存在性与求解方法.

2.8 叠加原理

设一线性偏微分方程具有下列形式:

$$L[u] = G,$$

我们也可用算子的记号来表示附加条件.例如,我们可以定义

$$[u_x]_{x=0} = M_i[u],$$
$$[u]_{x=l} = M_j[u],$$

其中算子 M_i, M_j 是表示附加条件的线性算子.于是初边值问题可以写为

$$\begin{cases} L[u] = G, \\ M_1[u] = g_1, \\ \vdots \\ M_n[u] = g_n, \end{cases} \tag{2.8.1}$$

其中第一个方程是线性偏微分方程,而其余的是线性初始条件或线性边界条件.例如,初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = G(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x,0) = g_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u_t(x,0) = g_2(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = g_3(t), & u(l,t) = g_4(t), t \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.8.2}$$

可以写成下列形式:

$$\begin{cases} L[u] = G, \\ M_1[u] = g_1, \quad M_2[u] = g_2, \\ M_3[u] = g_3, \quad M_4[u] = g_4, \end{cases} \tag{2.8.3}$$

其中 g_i 是给定的函数,而算子的下标可以是任意指定的.

我们考察定解问题(2.8.1).令

$$u = v + w,$$

其中 v 是定解问题(2.8.1)中的方程的特解,即

$$L[v] = G.$$

因为这个方程是线性的,所以我们有

$$L[u] = L[v] + L[w] = G.$$

因此

$$L[w] = 0.$$

于是我们可以这样说,一个给定的偏微分方程的解能够表示为它的一个特解与它所对应的齐次方程(或称相应齐次方程)的解的和.

由于定解问题(2.8.1)中的方程与所包含的附加条件都是线性的,我们可以把定解问题(2.8.1)分解为下面一系列定解问题:

$$\begin{cases} L[u_0] = G, \\ M_1[u_0] = 0, \\ M_2[u_0] = 0, \\ \vdots \\ M_n[u_0] = 0, \end{cases} \tag{2.8.4}$$

$$\begin{cases} L[u_1] = 0, \\ M_1[u_1] = g_1, \\ M_2[u_1] = 0, \\ \vdots \\ M_n[u_1] = 0, \end{cases} \tag{2.8.5}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} L[u_n] = 0, \\ M_1[u_n] = 0, \\ M_2[u_n] = 0, \\ \vdots \\ M_n[u_n] = g_n. \end{cases} \tag{2.8.6}$$

然后定解问题(2.8.1)的解可用下列形式得到:

$$u = \sum_{i=0}^{n} u_i. \tag{2.8.7}$$

现在我们来考察定解问题(2.8.5).假定我们找到一个函数列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$,它可以是有限个或无限个,满足下列齐次方程组:

$$\begin{cases} L[\varphi_i] = 0, \\ M_2[\varphi_i] = 0, \\ \vdots \\ M_n[\varphi_i] = 0, \end{cases} (i = 1,2,3,\cdots) \tag{2.8.8}$$

而且假定我们能把 g_1 表示成级数

$$g_1 = c_1 M_1[\varphi_1] + c_2 M_1[\varphi_2] + \cdots, \tag{2.8.9}$$

那么函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$的线性组合

$$u_1 = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots \tag{2.8.10}$$

是定解问题(2.8.5)的解.这就称为*叠加原理*.当式(2.8.10)中的线性组合的项数是无限时,我们要求这个无穷级数应是一致收敛和充分可微的,且所有级数 $N_k[u_1]$都是一致收敛的,其中 $N_0 = L, N_j = M_j, j = 1,2,\cdots,n$.

习　题

1. 试证:"长弦"的振动方程是

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - g,$$

其中 g 是重力加速度.

2. 导出弦的*阻尼波动方程*

$$u_{tt} + a u_t = c^2 u_{xx},$$

其中阻尼力与速度成正比,a 是常数.

考虑回复力与弦的位移成正比时的情形,证明这时所得到的偏微分方程是

$$u_{tt} + a u_t + b u = c^2 u_{xx},$$

其中 b 是常数.这个方程称为*电报方程*.

3. 考察一均匀梁的横振动.引用梁的欧拉理论,在一点的力矩 M 可写成

$$M = -EI u_{xx},$$

其中 EI 称为梁的弯曲刚度,E 是弹性模量,I 是梁的横截面的转动惯量.证明梁的横振动可用下列方程来描述:

$$u_{tt} + c^2 u_{xxxx} = 0,$$

其中 $c^2 = EI/\rho A$,ρ 是密度,A 是梁的横截面面积.

4. 导出弹性薄板的弯曲方程

$$\nabla^4 u = q/D,$$

其中 q 是每单位面积上的均匀负载,D 是板的弯曲刚度,而

$$\nabla^4 u = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}.$$

5. 导出一维热传导方程

$$u_t = ku_{xx}.$$

假设热量因杆的物质的放射衰变(按指数规律)而有损失,证明上述方程将变为

$$u_t = ku_{xx} + he^{-\alpha t},$$

其中 h 和 α 都是常数.

6. 从电动力学的麦克斯韦方程组出发,证明在导电的介质中,电场强度 $\boldsymbol{E}$,磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 和电流密度 $\boldsymbol{J}$ 满足下列方程:

$$\nabla^2 \boldsymbol{X} = \mu\varepsilon \boldsymbol{X}_{tt} + \mu\sigma \boldsymbol{X}_t,$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 表示 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{J}$,μ 是导磁率,ε 是介电常数,σ 是电导率.

7. 导出流体力学中的连续性方程

$$\rho_t + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0$$

和欧拉运动方程

$$\rho[\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u} \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{u}] + \mathrm{grad}\, p = 0.$$

8. 在点 Q 处的势的拉普拉斯方程(2.6.11)的推导中,点 Q 是在物体外的.现在要确定当点 Q 在物体内时的势,并证明它满足泊松方程

$$\nabla^2 u = -4\pi\rho,$$

其中 ρ 是物体的密度.

9. 在波动方程 $U_{tt} = \nabla^2 U$ 中令 $U = e^{ikt}u$ 与在热传导方程 $U_t = \nabla^2 U$ 中令 $U = e^{-k^2 t}u$,证明 $u(x,y,z)$ 满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0.$$

第三章　二阶线性偏微分方程的分类

3.1　两个自变量的二阶线性偏微分方程

一般的含一个未知函数的二阶线性偏微分方程可以写成

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + Fu = G, \tag{3.1.1}$$

其中,我们假设 $A_{ij}=A_{ji}$,且 A_{ij},B_i,F 和 G 都是定义在$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$空间的某一区域内的实值函数.

本章我们将研究两个自变量 x,y 的未知函数 u 的二阶线性方程.因此方程(3.1.1)可以写成下列形式:

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G, \tag{3.1.2}$$

其中系数都是 x 与 y 的函数,且 A,B,C 不同时为零.我们将假设函数 u 及其系数都是二次连续可微的.

二阶方程的分类①是建立在通过坐标变换能够把方程(3.1.2)在一点化成标准形式或典型形式的基础上的.一个方程在点(x_0,y_0)称为是双曲型、抛物型或椭圆型的,是根据式子

$$B^2(x_0,y_0)-4A(x_0,y_0)C(x_0,y_0) \tag{3.1.3}$$

为正、为零或为负而定的.如果方程在一个区域内的每点均为双曲型的、抛物型的或椭圆型的,那么就称方程在这区域内是双曲型、抛物型或椭圆型的.就两个自变量的情况来说,在一给定的区域内把已知方程化成标准形式的变换总是能够找到的.但是,就多个自变量来说,这样的变换一般是不可能找到的.

我们要利用自变量的变换,把方程(3.1.2)化为标准形式.设新变量是

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y),\\ \eta=\eta(x,y).\end{cases} \tag{3.1.4}$$

假设 ξ 和 η 都是二次连续可微的,且函数行列式

---

①　二阶线性偏微分方程的分类是由解析几何中的二次方程的分类得到启发的.二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

是双曲线、抛物线或椭圆是按 B^2-4AC 为正、为零或为负而定的.

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \tag{3.1.5}$$

在所考虑的区域内恒不等于零,那么 x 和 y 可由变换(3.1.4)惟一确定.设 x 和 y 都是 ξ 和 η 的二次连续可微函数,我们有

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}, \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}. \end{cases} \tag{3.1.6}$$

把上面这些偏导数的值代入方程(3.1.2),得到

$$A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + D^* u_\xi + E^* u_\eta + F^* u = G^*, \tag{3.1.7}$$

其中

$$\begin{cases} A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2, \\ B^* = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y, \\ C^* = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2, \\ D^* = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y, \\ E^* = A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y, \\ F^* = F, \\ G^* = G. \end{cases} \tag{3.1.8}$$

经过一般变换(3.1.4)所产生的方程(3.1.7)和原先的方程(3.1.2)具有相同的形式.如果函数行列式不等于零,那么经过这样的变换后,方程所属的类型仍保持不变.这个结论可以从判别式的符号在变换下是不变的这一事实所看出,即

$$B^{*2} - 4A^*C^* = J^2(B^2 - 4AC), \tag{3.1.9}$$

这个等式是容易验证的.这里,应该注意的是方程在区域内的不同的点上,可以属于不同的类型.但是在本书中,我们将假设所考虑的方程在给定的区域内属于同一类型.

方程(3.1.2)的分类将依赖于系数 $A(x,y)$,$B(x,y)$和 $C(x,y)$在已知点(x,y)上的值.因此,我们把方程(3.1.2)改写为

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = H, \tag{3.1.10}$$

其中

$$H = H(x, y, u, u_x, u_y),$$

而方程(3.1.7)写为

$$A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} = H^*, \qquad (3.1.11)$$

其中

$$H^* = H^*(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

3.2 标准形式

在本节中,我们将考虑化方程(3.1.10)为标准形式的问题.

我们首先假定 A,B,C 都不是零.设 ξ 和 η 是新变量,使得方程(3.1.11)中的系数 A^* 和 C^* 都等于零.于是由式(3.1.8),得到

$$A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \equiv 0,$$

和

$$C^* = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 \equiv 0.$$

这两个方程的形式是相同的,因此我们可以把它们写成下列形式:

$$A\zeta_x^2 + B\zeta_x\zeta_y + C\zeta_y^2 \equiv 0, \qquad (3.2.1)$$

其中 ζ 代表 ξ 或 η 中的任何一个.方程(3.2.1)除以 ζ_y^2,变成

$$A\left(\frac{\zeta_x}{\zeta_y}\right)^2 + B\left(\frac{\zeta_x}{\zeta_y}\right) + C \equiv 0. \qquad (3.2.2)$$

沿着曲线 ζ= 常数,有

$$\mathrm{d}\zeta = \zeta_x \mathrm{d}x + \zeta_y \mathrm{d}y = 0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\zeta_x}{\zeta_y}. \qquad (3.2.3)$$

因此方程(3.2.2)可写成下列形式:

$$Ay_x^2 - By_x + C = 0, \qquad (3.2.4)$$

它的根是

$$y_x = (B + \sqrt{B^2 - 4AC})/2A \qquad (3.2.5)$$

和

$$y_x = (B - \sqrt{B^2 - 4AC})/2A. \qquad (3.2.6)$$

方程(3.2.4)或(3.2.5)和(3.2.6)称为特征方程,它们沿着 $x-y$ 平面上的两族曲线 ξ= 常数和 η= 常数都是常微分方程.方程(3.2.5)和(3.2.6)的解或积分称为特征线.因为这些方程都是一阶常微分方程,所以每个解含有一个任意常数.我们取 ξ 是这些常数中的任一个值,而取 η 是另一个值.这里,我们应

注意曲线 $\xi=$ 常数和 $\eta=$ 常数在 $\xi-\eta$ 坐标系中表示平行于坐标轴的直线.

(A)双曲型

如果 $B^2-4AC>0$,那么方程(3.2.5)和(3.2.6)的积分曲线为两族不相同的实特征线.方程(3.1.11)化为

$$u_{\xi\eta}=H_1, \tag{3.2.7}$$

其中 $H_1=H^*/B^*$.容易证明 $B^*\neq0$.这种形式称为双曲型方程的第一标准形式.

现在如果再引入新自变量

$$\begin{cases}\alpha=\xi+\eta,\\ \beta=\xi-\eta,\end{cases} \tag{3.2.8}$$

于是方程(3.2.7)化为

$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=H_2(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta). \tag{3.2.9}$$

这种形式称为双曲型方程的第二标准形式.

(B)抛物型

在这种情况下,有 $B^2-4AC=0$.因此方程(3.2.5)和(3.2.6)完全相同.于是存在一族实特征线,我们只能得到一积分 $\xi=$ 常数(或 $\eta=$ 常数).

因为 $B^2=4AC$ 和 $A^*=0$,我们得到①

$$\begin{aligned}A^*&=A\xi_x^2+B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2\\&=(\sqrt{A}\xi_x+\sqrt{C}\xi_y)^2=0,\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}B^*&=2A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+2C\xi_y\eta_y\\&=2(\sqrt{A}\xi_x+\sqrt{C}\xi_y)(\sqrt{A}\eta_x+\sqrt{C}\eta_y)\\&=0,\end{aligned}$$

其中函数 $\eta(x,y)$ 是任选的,只要使它与 $\xi(x,y)$ 是函数无关的;例如取 $\eta=y$,函数行列式在抛物型的区域内就不等于零.

这时 $C^*\neq0$,以 C^* 除方程(3.1.11)得

$$u_{\eta\eta}=H_3(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta). \tag{3.2.10}$$

上述形式称为抛物型方程的标准形式.

如果我们选 $\eta=$ 常数作为方程(3.2.5)的积分,那么方程(3.1.11)也可取下列形式:

$$u_{\xi\xi}=H_3^*(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta). \tag{3.2.11}$$

---

① 这时因为 A,C 同号,所以不妨设 A,C 均为正.

(C)椭圆型

对于椭圆型方程来说,有 $B^2-4AC<0$.因而二次方程(3.2.4)无实值解,但有两个复共轭解,它们是实变量 x 和 y 的复值函数.于是在这种情形下,没有实特征线.然而,如果系数 A,B 和 C 都是 x 与 y 的解析函数[①],那么我们可把方程(3.2.4)考虑为复变量 x 和 y 的方程.

由于 ξ 和 η 都是复变量,我们引入新的实变量

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{2}(\xi+\eta),\\ \beta=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\xi-\eta)\end{cases}\tag{3.2.12}$$

因此

$$\begin{cases}\xi=\alpha+\mathrm{i}\beta,\\ \eta=\alpha-\mathrm{i}\beta.\end{cases}\tag{3.2.13}$$

首先变换方程(3.1.10),可得

$$\begin{aligned}A^{**}(\alpha,\beta)u_{\alpha\alpha}+B^{**}(\alpha,\beta)u_{\alpha\beta}+C^{**}(\alpha,\beta)u_{\beta\beta}\\=H_4(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta),\end{aligned}\tag{3.2.14}$$

其中的系数与方程(3.1.11)的系数取得相同的形式.利用变换(3.2.13),等式 $A^*=C^*=0$ 变为

$$\begin{aligned}&(A\alpha_x^2+B\alpha_x\alpha_y+C\alpha_y^2)-(A\beta_x^2+B\beta_x\beta_y+C\beta_y^2)\\&\quad+\mathrm{i}[2A\alpha_x\beta_x+B(\alpha_x\beta_y+\alpha_y\beta_x)+2C\alpha_y\beta_y]=0,\\&(A\alpha_x^2+B\alpha_x\alpha_y+C\alpha_y^2)-(A\beta_x^2+B\beta_x\beta_y+C\beta_y^2)\\&\quad-\mathrm{i}[2A\alpha_x\beta_x+B(\alpha_x\beta_y+\alpha_y\beta_x)+2C\alpha_y\beta_y]=0,\end{aligned}$$

即

$$\begin{cases}(A^{**}-C^{**})+\mathrm{i}B^{**}=0,\\ (A^{**}-C^{**})-\mathrm{i}B^{**}=0.\end{cases}$$

要使上面两个等式成立,当且仅当

$$A^{**}=C^{**}\text{ 且 }B^{**}=0.$$

因此方程(3.2.14)化为

$$A^{**}u_{\alpha\alpha}+A^{**}u_{\beta\beta}=H_4(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta).$$

把上式除以 A^{**},得

---

① 两个实变量 x,y 的函数称为在某一区域内是解析的,如果在此区域内的每一点 (x_0,y_0) 的某一邻域内,函数能表示为变量 $(x-x_0)$ 和 $(y-y_0)$ 的幂级数.

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = H_5(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta), \tag{3.2.15}$$

其中 $H_5 = H_4 / A^*$. 这种形式称为椭圆型方程的标准形式.

【例 3.2.1】 考察方程

$$y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0,$$

这里

$$A = y^2, \quad B = 0, \quad C = -x^2.$$

于是判别式

$$B^2 - 4AC = 4x^2y^2 > 0 \quad (x \neq 0, y \neq 0).$$

所以方程除了在坐标轴 $x=0$ 和 $y=0$ 上外,处处是双曲型的. 由特征方程(3.2.4)

$$Ay_x^2 - By_x + C = 0,$$

即

$$y_x = (B + \sqrt{B^2 - 4AC})/2A$$

和

$$y_x = (B - \sqrt{B^2 - 4AC})/2A,$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}.$$

对上面两个方程求积分后,得到

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 = c_1$$

和

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c_2.$$

于是第一族特征线是一族双曲线

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 = c_1,$$

第二族特征线是一族圆

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c_2.$$

为了把原方程化为标准形式,我们考虑变换

$$\begin{cases}\xi = \dfrac{1}{2}y^2 - \dfrac{1}{2}x^2, \\ \eta = \dfrac{1}{2}y^2 + \dfrac{1}{2}x^2,\end{cases}$$

利用(3.1.6)得

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -xu_\xi + xu_\eta, \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = yu_\xi + yu_\eta, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\ &= x^2 u_{\xi\xi} - 2x^2 u_{\xi\eta} + x^2 u_{\eta\eta} - u_\xi + u_\eta, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} \\ &= y^2 u_{\xi\xi} + 2y^2 u_{\xi\eta} + y^2 u_{\eta\eta} + u_\xi + u_\eta. \end{aligned}$$

因而原方程化为标准形式

$$u_{\xi\eta} = \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)}u_\xi - \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)}u_\eta.$$

【例 3.2.2】 考察偏微分方程

$$x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0.$$

在这种情况下,判别式

$$B^2 - 4AC = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0.$$

因此方程处处是抛物型的.因为特征方程是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x},$$

所以特征线族是

$$\frac{y}{x} = c,$$

这是一族直线的方程.

考虑变换

$$\begin{cases}\xi = \dfrac{y}{x}, \\ \eta = y,\end{cases}$$

其中 η 是任意选择的.于是原方程化为标准形式

$$y^2 u_{\eta\eta} = 0,$$

即

$$u_{\eta\eta} = 0 \quad (y \neq 0).$$

【例 3.2.3】 方程

$$u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$$

除坐标轴 $x=0$ 外,是处处椭圆型的,因为

$$B^2 - 4AC = -4x^2 < 0 \quad (x \neq 0).$$

它的特征方程是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{i}x$$

和

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{i}x.$$

积分可得

$$2y - \mathrm{i}x^2 = c_1$$

和

$$2y + \mathrm{i}x^2 = c_2.$$

因而如果设

$$\begin{cases} \xi = 2y - \mathrm{i}x^2, \\ \eta = 2y + \mathrm{i}x^2, \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2}(\xi + \eta) = 2y, \\ \beta = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\xi - \eta) = -x^2, \end{cases}$$

那么我们得到标准形式

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = -\frac{1}{2\beta}u_\beta.$$

这里我们应当注意,给定的偏微分方程在不同的区域内,可以属于不同的类型.例如特里谷米方程

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0 \tag{3.2.16}$$

在 $x>0$ 内是椭圆型的,在 $x<0$ 内是双曲型的,因为 $B^2-4AC=-4x$.

3.3 常系数方程

就一个实常系数方程来说,方程在区域内的所有点上属于同一类型,这是因为判别式 B^2-4AC 是常数.

从特征方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (B + \sqrt{B^2 - 4AC})/2A, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (B - \sqrt{B^2 - 4AC})/2A, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

我们能看出特征线族

$$\begin{cases} y = \left(\dfrac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right)x + C_1, \\ y = \left(\dfrac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right)x + C_2 \end{cases} \tag{3.3.2}$$

是两族直线.所以特征坐标具有下列形式:

$$\begin{cases} \xi = y - \lambda_1 x, \\ \eta = y - \lambda_2 x, \end{cases} \tag{3.3.3}$$

其中

$$\lambda_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \tag{3.3.4}$$

常系数二阶线性偏微分方程可以写成

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G(x,y). \tag{3.3.5}$$

(A)双曲型方程

当 $B^2 - 4AC > 0$ 时,方程是双曲型的.在这种情况下,方程有两族不同的特征线.因为在 ξ-η 坐标系中,$\xi = C_1$ 和 $\eta = C_2$ 是平行于坐标轴的两族直线,所以变换(3.3.3)把特征线族(3.3.2)映射为 ξ-η 坐标系的坐标线族.经过这个变换后,方程(3.3.5)变为

$$u_{\xi\eta} = D_1 u_\xi + E_1 u_\eta + F_1 u + G_1(\xi, \eta), \tag{3.3.6}$$

其中 D_1,E_1 和 F_1 都是常数.这里,因为系数都是常数,所以低阶项都可用显式表示出来.

当 $A = 0$ 时,方程(3.3.1)不能成立.在这种情况下,特征方程可以取下列形式:

$$-B(\mathrm{d}x/\mathrm{d}y) + C(\mathrm{d}x/\mathrm{d}y)^2 = 0,$$

它又可以再改写为

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = 0$$

和

$$-B + C(\mathrm{d}x/\mathrm{d}y) = 0.$$

积分得到

$$x = C_1$$

和

$$x = (B/C)y + C_2,$$

其中 C_1 和 C_2 都是积分常数. 于是特征坐标是

$$\begin{cases}\xi = x, \\ \eta = x - (B/C)y.\end{cases} \tag{3.3.7}$$

经过这个变换后,方程(3.3.5)化为标准形式

$$u_{\xi\eta} = D_1^* u_\xi + E_1^* u_\eta + F_1^* u + G_1^*(\xi, \eta), \tag{3.3.8}$$

其中 D_1^*,E_1^* 和 F_1^* 都是常数.

(B)抛物型方程

当 $B^2 - 4AC = 0$ 时,方程是抛物型的. 在这种情况下,只存在一族实特征线. 由式(3.3.4)得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = (B/2A),$$

因此这族特征线是

$$y = (B/2A)x + C_1,$$

其中 C_1 是积分常数. 于是得到

$$\begin{cases}\xi = y - (B/2A)x, \\ \eta = hy + kx,\end{cases} \tag{3.3.9}$$

其中 η 可任意选择,只要使得变换的函数行列式不等于零,且 h 和 k 都是常数.

在变换(3.3.9)中适当选择常数 h 和 k,方程(3.3.5)化为

$$u_{\eta\eta} = D_2 u_\xi + E_2 u_\eta + F_2 u + G_2(\xi, \eta), \tag{3.3.10}$$

其中 D_2,E_2 和 F_2 都是常数.

如果 $B = 0$,我们从关系式

$$B^2 - 4AC = 0$$

能立即看出 C 或 A 等于零. 这时原方程本身已经具有标准形式. 同理,在 A 或 C 等于零的情况下,可得 B 等于零. 原方程也已为标准形式.

(C)椭圆型方程

当 $B^2 - 4AC < 0$ 时,方程是椭圆型的. 在这种情况下,两族特征线是复共轭形式的.

由特征方程可得

$$\begin{cases}y = \lambda_1 x + C_1, \\ y = \lambda_2 x + C_2,\end{cases} \tag{3.3.11}$$

其中 λ_1 和 λ_2 都是复数. 因此 C_1 和 C_2 允许取复值. 于是得到

$$\begin{cases}\xi = y - (a + \mathrm{i}b)x, \\ \eta = y - (a - \mathrm{i}b)x,\end{cases} \tag{3.3.12}$$

其中 $\lambda_{1,2}=a\pm ib$，a 和 b 都是实常数，且 $a=B/2A$，$b=\sqrt{4AC-B^2}/2A$.

引入新变量

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{2}(\xi+\eta)=y-ax,\\ \beta=\dfrac{1}{2i}(\xi-\eta)=-bx.\end{cases}\tag{3.3.13}$$

用这个变换立即能把方程(3.3.5)化为标准形式

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=D_3u_\alpha+E_3u_\beta+F_3u+G_3(\alpha,\beta),\tag{3.3.14}$$

其中 D_3，E_3 和 F_3 都是常数.

我们注意到，因为 $B^2-4AC<0$，所以 A 或 C 都不能是零.

【例 3.3.1】 考察方程

$$4u_{xx}+5u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y=2.$$

因为 $A=4$，$B=5$，$C=1$，所以 $B^2-4AC=9>0$，方程是双曲型的. 于是特征方程为

$$\frac{dy}{dx}=1$$

和

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4},$$

因此特征线族是

$$y=x+C_1$$

和

$$y=(x/4)+C_2.$$

所以作变换

$$\begin{cases}\xi=y-x,\\ \eta=y-(x/4),\end{cases}$$

能把原方程化为标准形式

$$u_{\xi\eta}=\frac{1}{3}u_\eta-\frac{8}{9}.$$

这个形式是第一标准形式.

通过变换

$$\begin{cases}\alpha=\xi+\eta,\\ \beta=\xi-\eta,\end{cases}$$

可以得到第二标准形式

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \frac{1}{3}u_\alpha - \frac{1}{3}u_\beta - \frac{8}{9}.$$

【例 3.3.2】 方程

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = \mathrm{e}^y$$

是抛物型的，因为 $A = 1, B = -4, C = 4$，于是 $B^2 - 4AC = 0$. 因此由式(3.3.9)可得

$$\xi = y + 2x$$

和

$$\eta = y,$$

其中 η 是任意选择的.用这个变换，原方程化为

$$u_{\eta\eta} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^\eta.$$

【例 3.3.3】 考察方程

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0.$$

因为 $A = 1, B = 1, C = 1$，所以 $B^2 - 4AC = -3 < 0$，因此方程是椭圆型的.

我们有

$$\lambda_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

和

$$\begin{cases} \xi = y - \left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x, \\ \eta = y - \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x. \end{cases}$$

引入新变量

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2}(\xi + \eta) = y - \dfrac{1}{2}x, \\ \beta = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\xi - \eta) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x, \end{cases}$$

于是原方程化为标准形式

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \frac{2}{3}u_\alpha + \frac{2}{\sqrt{3}}u_\beta.$$

3.4 通　　解

一般来说，求给定方程的通解不是那么简单的事.但有时把方程的标准形

式作进一步的简化,可以得出通解.如果方程的标准形式是简单的,那么我们能立即确定其通解.

【例 3.4.1】 求下列方程的通解:

$$x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0.$$

在例 3.2.2 中,用变换 $\xi = y/x, \eta = y$,这个方程可化为标准形式

$$u_{\eta\eta} = 0 \quad (y \neq 0).$$

把上式对 η 积分两次,得到

$$u(\xi, \eta) = \eta f(\xi) + g(\xi),$$

其中 $f(\xi)$和 $g(\xi)$都是任意函数.用自变量 x 和 y 来表示,得到

$$u(x, y) = yf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right).$$

【例 3.4.2】 确定下列方程的通解:

$$4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2.$$

用变换 $\xi = y - x, \eta = y - (x/4)$,这个方程的标准形式是(见例 3.3.1)

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{3}u_\eta - \frac{8}{9}.$$

用代换 $v = u_\eta$,上述标准形式又可化为

$$u_\xi = \frac{1}{3}v - \frac{8}{9}.$$

通过分离变量容易求出它的积分.先对 ξ 积分,得到

$$v = \frac{8}{3} + \frac{1}{3}e^{(\xi/3) + F(\eta)}.$$

再对 η 积分,得

$$u(\xi, \eta) = \frac{8}{3}\eta + \frac{1}{3}g(\eta)e^{\xi/3} + f(\xi),$$

其中 $f(\xi)$和 $g(\eta)$都是任意函数.所以原方程的通解是

$$u(x, y) = \frac{8}{3}\left(y - \frac{x}{4}\right) + \frac{1}{3}g\left(y - \frac{x}{4}\right)e^{\frac{1}{3}(y-x)} + f(y - x).$$

【例 3.4.3】 试求出下列方程的通解:

$$3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$$

因为 $B^2 - 4AC = 64 > 0$,所以方程是双曲型的.于是由式(3.3.2),特征线族是

$$y = 3x + C_1$$

和

$$y = \frac{1}{3}x + C_2.$$

取特征坐标为

$$\begin{cases} \xi = y - 3x, \\ \eta = y - \frac{1}{3}x, \end{cases}$$

原方程化为

$$\frac{64}{3} u_{\xi\eta} = 0.$$

因此得

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

通过积分可得它的通解

$$u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

其中 $f(\xi)$和 $g(\eta)$都是任意函数.

用原来的变量 x 和 y 来表示,上式变为

$$u(x,y) = f(y-3x) + g\left(y - \frac{x}{3}\right).$$

3.5 小结与进一步的简化

我们对两个自变量的常系数二阶线性偏微分方程的分类小结如下:

双曲型方程: $u_{rs} = a_1 u_r + a_2 u_s + a_3 u + f_1$, (3.5.1)

$u_{rr} - u_{ss} = a_1^* u_r + a_2^* u_s + a_3^* u + f_1^*$; (3.5.2)

抛物型方程: $u_{ss} = b_1 u_r + b_2 u_s + b_3 u + f_2$; (3.5.3)

椭圆型方程: $u_{rr} + u_{ss} = c_1 u_r + c_2 u_s + c_3 u + f_3$, (3.5.4)

其中 r 和 s 表示在线性变换

$$\begin{cases} r = r(x,y), \\ s = s(x,y) \end{cases} \tag{3.5.5}$$

下的新的自变量,且其函数行列式 $J \neq 0$.

为了进一步简化方程(3.5.1),引入新函数

$$v = u e^{-(ar+bs)}, \tag{3.5.6}$$

其中 a 和 b 都是待定系数.计算导数,得

$$u_r = (v_r + av)e^{ar+bs},$$

$$u_s = (v_s + bv)e^{ar+bs},$$

$$u_{rr} = (v_{rr} + 2av_r + a^2 v)e^{ar+bs},$$

$$u_{rs} = (v_{rs} + av_s + bv_r + abv)e^{ar+bs},$$

$$u_{ss} = (v_{ss} + 2bv_s + b^2 v)e^{ar+bs}.$$

把这些导数式代入方程(3.5.1),得到

$$v_{rs} + (b - a_1)v_r + (a - a_2)v_s + (ab - a_1 a - a_2 b - a_3)v = f_1 e^{(ar+bs)}.$$

为了使上式中的一阶导数的系数等于零,取

$$a = a_2, b = a_1,$$

于是上面的方程变为

$$v_{rs} = (a_1 a_2 + a_3)v + g_1,$$

其中 $g_1 = f_1 e^{-(a_2 r + a_1 s)}$.用类似的方法,我们可变换方程(3.5.2)~(3.5.4).于是,相应于方程(3.5.1)~(3.5.4),可得下列变换后的方程:

双曲型方程: $v_{rs} = h_1 v + g_1,$ (3.5.7)

$v_{rr} - v_{ss} = h_1^* v + g_1^*;$ (3.5.8)

抛物型方程: $v_{ss} = h_2 v + g_2;$ (3.5.9)

椭圆型方程: $v_{rr} + v_{ss} = h_3 v + g_3.$ (3.5.10)

就多个自变量或高阶偏微分方程来说,它们的分类要复杂得多.欲进一步阅读,可参看柯朗和希尔伯特编著的《数学物理方法》.

习　题

1. 确定下列各方程为双曲型、抛物型或椭圆型的范围,并在相应的区域中化方程为标准形式:

(a) $xu_{xx} + u_{yy} = x^2$;

(b) $u_{xx} + y^2 u_{yy} = y$;

(c) $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$;

(d) $x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = e^x$;

(e) $u_{xx} + u_{xy} - xu_{yy} = 0$;

(f) $e^x u_{xx} + e^y u_{yy} = u$;

(g) $\sin^2 x u_{xx} + \sin 2x u_{xy} + \cos^2 x u_{yy} = x$;

(h) $u_{xx} - yu_{xy} + xu_x + yu_y + u = 0$.

2. 求出下列各方程的通解,并代回原方程来检验是否是解:

(i) $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xyu_x + y^2 u_y = 0$;

(ii) $ru_{tt} - c^2 ru_{rr} - 2c^2 u_r = 0$($c$ 是常数).

(提示:令 $v = ru$.)

3. 求下列方程的特征线,特征坐标,并化方程为标准形式:

(a) $u_{xx} + 2u_{xy} + 3u_{yy} + 4u_x + 5u_y + u = e^x$;

(b) $2u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{yy} + 3u = 0$;

(c) $u_{xx}+5u_{xy}+4u_{yy}+7u_y=\sin x$;

(d) $u_{xx}+u_{yy}+2u_x+8u_y-u=0$;

(e) $u_{xy}+2u_{yy}+9u_x+u_y=2$;

(f) $6u_{xx}-u_{xy}+u=y^2$;

(g) $u_{xy}+u_x+u_y=3x$;

(h) $u_{yy}-9u_x+7u_y=\cos y$.

4. 确定下列方程的通解:

(i) $u_{xx}-\dfrac{1}{c^2}u_{yy}=0$($c$ 是常数);

(ii) $u_{xx}+u_{yy}=0$;(提示:在(i)中令 $c=\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.)

(iii) $u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy}=0$;(提示:令 $z=x+\mathrm{i}y$.)

(iv) $u_{xx}-3u_{xy}+2u_{yy}=0$;

(v) $u_{xx}+u_{xy}=0$;

(vi) $u_{xx}+10u_{xy}+9u_{yy}=y$.

5. 引入新变量

$$v=u\mathrm{e}^{-(a\xi+b\eta)},$$

其中 a 和 b 都是待定常数,把下列方程:

(i) $u_{xx}-u_{yy}+3u_x-2u_y+u=0$;

(ii) $3u_{xx}+7u_{xy}+2u_{yy}+u_y+u=0$

化为标准形式

$$v_{\xi\eta}=cv\quad (c\text{ 是常数}).$$

6. 已知常系数抛物型方程

$$u_{xx}=au_t+bu_x+cu+f.$$

证明如果作代换

$$u=v\mathrm{e}^{\frac{1}{2}bx},$$

那么原方程当 $c=-(b^2/4)$时将化为热传导方程

$$v_{xx}=av_t+g,$$

其中

$$g=f\mathrm{e}^{-bx/2}.$$

第四章　特征线积分法

本章介绍求解一些典型的双曲型方程(波动方程)及其相关问题的重要方法——特征线积分法.

4.1　弦振动方程的达朗贝尔公式

考虑无界弦振动的柯西问题:

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0\quad(-\infty<x<\infty,\ t>0),\tag{4.1.1}$$

$$u(x,0)=\phi(x)\quad(-\infty<x<\infty),\tag{4.1.2}$$

$$u_t(x,0)=\psi(x)\quad(-\infty<x<\infty).\tag{4.1.3}$$

与方程(4.1.1)相应的特征方程为

$$\mathrm{d}x^2-a^2\mathrm{d}t^2=0,$$

特征线为

$$x-at=\text{const},\quad x+at=\text{const},$$

引入新变量

$$\xi=x+at,\quad \eta=x-at,$$

使方程(4.1.1)化为

$$u_{\xi\eta}=0.\tag{4.1.4}$$

把方程(4.1.4)关于 η 积分,然后再关于 ξ 积分,容易得出方程(4.1.4)如下形式的解:

$$u=f_1(\xi)+f_2(\eta).\tag{4.1.5}$$

代回原来的自变量,我们有

$$u=f_1(x-at)+f_2(x+at),\tag{4.1.6}$$

由直接验证可知,只要这里的 f_1 与 f_2 是二阶可微的,它就确实能满足方程(4.1.1).

为了求出柯西问题的解,我们必须利用初始条件(4.1.2),(4.1.3)来决定函数 f_1 及 f_2. 把式(4.1.6)代入初始条件,就得到

$$f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x),\tag{4.1.7}$$

$$a(-f_1'(x)+f_2'(x))=\psi(x).\tag{4.1.8}$$

将式(4.1.8)积分一次,得到

$$a(-f_1(x)+f_2(x))=\int_{x_0}^{x}\psi(x')\mathrm{d}x'+c, \tag{4.1.9}$$

其中 x_0 及 c 为任意常数.由式(4.1.7)及(4.1.9)得出

$$f_1(x)=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(x')\mathrm{d}x'-\frac{c}{2a}, \tag{4.1.10}$$

$$f_2(x)=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(x')\mathrm{d}x'+\frac{c}{2a}, \tag{4.1.11}$$

将式(4.1.10)及(4.1.11)代入式(4.1.6),就得到柯西问题的解的表达式

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(x')\mathrm{d}x' \tag{4.1.12}$$

这公式称为达朗贝尔(D'Alembert)公式.

可以看出,如果柯西问题有解,则解一定可以由初始条件用公式(4.1.12)表示出来,因此解一定是惟一的.同时不难验证,当 $\varphi(x)\in c^2,\psi(x)\in c^1$ 时,式(4.1.12)的确给出柯西问题的解.解关于初始条件的连续依赖性也可以从公式(4.1.12)中看出.因此弦振动方程的柯西问题是适定的.

4.2 传播波

从上面看到,自由弦振动方程的解可以表示为形如 $f_1(x-at)$和 $f_2(x+at)$的两个函数的和.现在考察这样的函数有哪些性质.

记

$$u(x,t)=f(x-at), \tag{4.2.1}$$

它是齐次弦振动方程的解.给 t 以不同的值,就可以得到自由振动的弦在各时刻的振动状态.

在 $t=0$ 时 $u(x,0)=f(x)$,它对应于弦的初始振动状态,假设如图 4.1 所示,则经过时间 t_0 秒后,$u(x,t_0)=f(x-at_0)$,振动弦的外形保持不变,它在(x,u)平面上相当于原来的图形向右平移一段距离 at_0,如图 4.2.

这说明当方程的解表示为(4.2.1)的形式时,弦线上的质点的振动所构成的波形以常速度 a 向右传播.换言之,如果引进随时间而运动的坐标系

$$x'=x-at, \tag{4.2.2}$$

此时解(4.2.1)可写为 $u=f(x')$,当观察者随着这个动坐标系一起移动时,所观察到的波的形状始终不变.因此我们把方程(4.1.1)的形如 $f(x-at)$的解所描述的弦的振动规律称为右传播波.同样,把形如 $f(x+at)$的解称为左

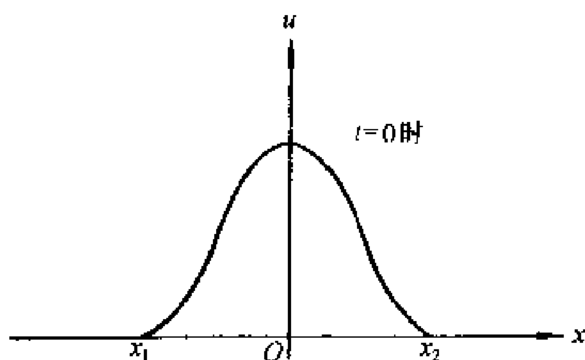


图 4.1

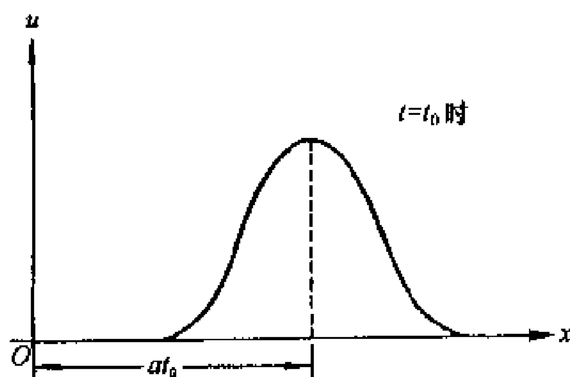


图 4.2

传播波,它所描写的弦线振动的图形以常速度 a 向左传播.

【例 4.2.1】 求下列初值问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \sin x, \\ u_t(x,0) = \cos x. \end{cases}$$

由公式(4.1.12),可得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}[\sin(x+ct) + \sin(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \cos\tau \mathrm{d}\tau \\ &= \sin x \cos ct + \frac{1}{2c}[\sin(x+ct) - \sin(x-ct)] \\ &= \sin x \cos ct + \frac{1}{c}\cos x \sin ct. \end{aligned}$$

【例 4.2.2】 求方程

$$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$$

的一般解.

特征方程为

$$dy^2 + 2\sin x dx dy - \cos^2 x dx^2 = 0,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \pm 1,$$

故

$$\begin{cases} y = x + \cos x + c_1, \\ y = -x + \cos x + c_2. \end{cases}$$

令

$$\begin{cases} \xi = x - y + \cos x, \\ \eta = x + y - \cos x, \end{cases}$$

方程变为

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

故

$$u(\xi, \eta) = \varphi(\eta) + \psi(\xi),$$

即

$$u(x, y) = \varphi(x + y - \cos x) + \psi(x - y + \cos x).$$

【例 4.2.3】 求方程

$$x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + x u_x + y u_y = 0$$

的一般解.

特征方程为

$$x^2 dy^2 + 2xy dx dy + y^2 dx^2 = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

所以

$$xy = c.$$

令

$$\begin{cases} \xi = xy, \\ \eta = y. \end{cases}$$

代入方程得

$$u_{\eta\eta} = -\frac{1}{\eta} u_\eta,$$

故

$$\ln u_\eta = -\ln\eta + \ln\varphi(\xi),$$

$$u_\eta = \frac{1}{\eta}\varphi(\xi),$$

$$u(\xi,\eta) = \phi(\xi)\ln\eta + \psi(\xi),$$

所以

$$u(x,y) = \phi(xy)\ln y + \psi(xy).$$

【例 4.2.4】 求下列初值问题的解：

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0 & (-\infty < x < +\infty,\ y > 0), \\ u|_{y=0} = 3x^2 & (-\infty < x < +\infty), \\ u_y|_{y=0} = 0 & (-\infty < x < +\infty). \end{cases}$$

特征方程为

$$\mathrm{d}y^2 - 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 3\mathrm{d}x^2 = 0,$$

$$\begin{cases} y = 3x + c_1, \\ y = -x + c_2. \end{cases}$$

令

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = 3x - y. \end{cases}$$

方程化为

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

故

$$u(x,y) = \varphi(x+y) + \psi(3x-y),$$

$$u|_{y=0} = \varphi(x) + \psi(3x) = 3x^2,$$

$$u_y|_{y=0} = \varphi'(x) - \psi'(3x) = 0,$$

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(3x) = 3x^2, \\ \varphi(x) - \dfrac{1}{3}\psi(3x) = c. \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{c}{4}, \\ \psi(3x) = \dfrac{9}{4}x^2 - \dfrac{c}{4} \quad 或 \quad \psi(\eta) = \dfrac{1}{4}\eta^2 - \dfrac{c}{4}. \end{cases}$$

因此

$$u(x,y) = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(3x-y)^2 = 3x^2 + y^2.$$

【例 4.2.5】 求下列问题的解：

$$\begin{cases} u_{xx} + yu_{yy} + \dfrac{1}{2}u_y = 0 \qquad (y < 0), \\ u|_{y=0} = \tau(x), \\ u_y|_{y=0} \quad \text{是有限值}. \end{cases}$$

特征方程为

$$dy^2 + y dx^2 = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-y}.$$

令

$$\begin{cases} \xi = x - 2\sqrt{-y}, \\ \eta = x + 2\sqrt{-y}, \end{cases}$$

得

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

所以

$$u(x,y) = \varphi(x - 2\sqrt{-y}) + \psi(x + 2\sqrt{-y}),$$

$$u|_{y=0} = \varphi(x) + \psi(x) = \tau(x).$$

又因为

$$u_y|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{-y}}[\varphi'(x - 2\sqrt{-y}) - \psi'(x + 2\sqrt{-y})]|_{y=0}$$

为有限值，故得 $\varphi'(x) - \psi'(x) = 0$，所以

$$\varphi(x) - \psi(x) = c,$$

于是得

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\tau(x) + \frac{c}{2},$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\tau(x) - \frac{c}{2},$$

所以

$$u(x,y) = \frac{1}{2}[\tau(x - 2\sqrt{-y}) + \tau(x + 2\sqrt{-y})].$$

【例 4.2.6】 求下列问题的解：

$$
\begin{cases}
u_{xx}+yu_{yy}+\dfrac{1}{2}u_y=0 \quad (y<0),\\
u|_{l_1}=\varphi(x),\quad 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\quad \varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)=\psi\left(\dfrac{1}{2}\right),\\
u|_{l_2}=\psi(x),\quad \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1,
\end{cases}
$$

其中,l_1 是特征线:$x-2\sqrt{-y}=0$;l_2 是特征线:$x+2\sqrt{-y}=1$.

由前题知方程的通解为

$$u(x,y)=f_1(x-2\sqrt{-y})+f_2(x+2\sqrt{-y}).$$

利用定解条件,得

$$f_1(0)+f_2(2x)=\varphi(x),\qquad f_2(x)=\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-f_1(0),$$

$$f_1(2x-1)+f_2(1)=\psi(x),\quad f_1(x)=\psi\left(\frac{1+x}{2}\right)-f_2(1).$$

又

$$f_1(0)+f_2(1)=\phi\left(\frac{1}{2}\right),$$

故得

$$u(x,y)=\phi\left(\frac{x+2\sqrt{-y}}{2}\right)+\psi\left(\frac{1+x-2\sqrt{-y}}{2}\right)-\varphi\left(\frac{1}{2}\right).$$

4.3 高维波动方程

在研究电磁场等科技问题时,有时需要讨论高维波动方程相关的问题,例如三维波动方程的柯西问题:

$$
\begin{cases}
u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), & (4.3.1)\\
u|_{t=0}=\phi(x,y,z), & (4.3.2)\\
u_t|_{t=0}=\psi(x,y,z). & (4.3.3)
\end{cases}
$$

为求解这个定解问题,我们介绍如下的球面平均法.代替函数 u,考虑 u 在以$M(x,y,z)$为球心,以 r 为半径的球面上的平均值,则这个平均值当 x,y,z 暂时固定之后就只与r,t 相关了.这启发我们引入一个表示 $u(x,y,z)$ 在以 $M(x,y,z)$为中心,以 r 为半径的球面 S_r^M 上的平均值的函数$\bar{u}(r,t)$,即

$$\bar{u}(r,t)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r^M}u(\xi,\eta,\delta,t)\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1} u(\xi,\eta,\delta,t)\mathrm{d}\omega, \tag{4.3.4}$$

其中 $\xi = x + r\sin\theta\cos\varphi$, $\eta = y + r\sin\theta\cos\varphi$, $\delta = z + r\cos\theta$, $\mathrm{d}\omega = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ 是单位球面面积元素, $\mathrm{d}S$ 是球面 S_r^M 上的面积元素,显然有 $\mathrm{d}S = r^2\mathrm{d}\omega$.

由式(4.3.4)及 $u(x,y,z,t)$ 的连续性可知,当 $r\to 0$ 时, $\lim\limits_{r\to 0}\bar{u}(r,t) = u(M,t)$,即

$$\bar{u}(0,t) = u(M,t) \equiv u(x,y,z,t).$$

下面来推导 $\bar{u}(r,t)$ 所满足的方程. 对方程(4.3.1)的两端在 S_r^M 所围成的球体 V_r^M 内积分,并应用高斯积分公式可得

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{V_r^M} \frac{\partial^2(x',y',z',t)}{\partial t^2}\mathrm{d}V &= a^2\iiint\limits_{V_r^M}\left(\frac{\partial^2 u(x',y',z',t)}{\partial x'^2}\right. \\
&\quad \left.+\frac{\partial^2 u(x',y',z',t)}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 u(x',y',z',t)}{\partial z'^2}\right)\mathrm{d}V \\
&= a^2\iint\limits_{S_r^M}\frac{\partial u(\xi,\eta,\delta,t)}{\partial n}\mathrm{d}S = a^2\iint\limits_{S_1^M}\frac{\partial u(\xi,\eta,\delta,t)}{\partial n}r^2\mathrm{d}\omega \\
&= a^2r^2\iint\limits_{S_1^M}\frac{\partial u(\xi,\eta,\delta,t)}{\partial n}\mathrm{d}\omega = a^2r^2\iint\limits_{S_1^M}\frac{\partial u(\xi,\eta,\delta,t)}{\partial r}\mathrm{d}\omega \\
&= a^2r^2\frac{\partial}{\partial r}\iint\limits_{S_1^M}u(\xi,\eta,\delta,t)\mathrm{d}\omega \\
&= 4\pi a^2r^2\frac{\partial\bar{u}(r,t)}{\partial r},
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

其中, $\boldsymbol{n}$ 是 S_r^M 的外法向矢量.

将式(4.3.5)左端的积分也采用球面坐标表示并交换微分、积分运算次序,得

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{V_r^M}\frac{\partial^2 u(x',y',z',t)}{\partial t^2}\mathrm{d}V &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\iiint\limits_{V_r^M}u(x',y',z',t)\mathrm{d}V \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\iiint\limits_{V_r^M}u(x',y',z',t)\rho^2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r\rho^2\iint\limits_{S_1}u(x+\rho\sin\theta\cos\varphi, y+\rho\sin\theta\sin\varphi, z+\rho\cos\theta)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\rho.
\end{aligned}$$

代回式(4.3.5)中得

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r \rho^2 \iint_{S_1^M} u(\xi', \eta', \delta', t) \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\rho = 4\pi a^2 r^2 \frac{\partial \bar{u}(r,t)}{\partial r},$$

其中，

$$\xi' = x + \rho\sin\theta\cos\varphi, \eta' = y + \rho\sin\theta\sin\varphi, \delta' = z + \rho\cos\theta.$$

将上式两端对 r 微分一次，得

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\iint_{S_1^M} u(\xi, \eta, \delta, t) r^2 \mathrm{d}\omega = 4\pi a^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \bar{u}(r,t)}{\partial r}\right),$$

或

$$\frac{\partial \bar{u}(r,t)}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \bar{u}(r,t)}{\partial r}\right),$$

但

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \bar{u}(r,t)}{\partial t}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\bar{u}(r,t))}{\partial r^2},$$

故得

$$\frac{\partial^2 (r\bar{u}(r,t))}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (r\bar{u}(r,t))}{\partial r^2}. \tag{4.3.6}$$

这是一个关于 $r\bar{u}(r,t)$ 的一维波动方程，它的通解为

$$r\bar{u}(r,t) = f_1(r + at) + f_2(r - at).$$

令 $r=0$ 得

$$f_1(at) + f_2(-at) = 0,$$

因此有

$$f_2(\lambda) = -f_1(-\lambda) \equiv -f(-\lambda),$$

于是得

$$r\bar{u}(r,t) = f(r + at) - f(at - r). \tag{4.3.7}$$

将式(4.3.7)两端对 r 求导，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u}(r,t)) &= \bar{u}(r,t) + r\frac{\partial \bar{u}(r,t)}{\partial r} \\ &= f'(r + at) + f'(at - r).\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

令 $r=0$，得

$$u(M,t) = \bar{u}(0,t) = 2f'(at). \tag{4.3.9}$$

再将式(4.3.7)两端对 t 求导，得

$$\frac{\partial}{\partial t}(r\bar{u}(r,t)) = a[f'(r + at) - f'(at - r)]. \tag{4.3.10}$$

由式(4.3.8),(4.3.10)得

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u}(r,t))+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(r\bar{u}(r,t))=2f'(r+at), \tag{4.3.11}$$

利用 $\bar{u}(r,t)$ 的表达式及初始条件(4.3.2),(4.3.3),得

$$\begin{aligned}2f'(r)&=\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u}(r,t))+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(r\bar{u}(r,t))\right]_{t=0}\\&=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\iint_{S_r^M}\frac{u}{r}\mathrm{d}S+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_r^M}\frac{u}{r}\mathrm{d}S\right]_{t=0}\\&=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\iint_{S_r^M}\frac{u}{r}\bigg|_{t=0}\mathrm{d}S+\frac{1}{a}\iint_{S_r^M}\frac{u_t}{r}\bigg|_{t=0}\mathrm{d}S\right]\\&=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\iint_{S_r^M}\frac{\varphi}{r}\mathrm{d}S+\frac{1}{a}\iint_{S_r^M}\frac{\psi}{r}\mathrm{d}S\right].\end{aligned}$$

在上式中,令 $r=at$,依式(4.3.9)得原问题的解

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t)&=u(M,t)\\&=\frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}^M}\frac{\varphi}{r}\bigg|_{r=at}\mathrm{d}S+\iint_{S_{at}^M}\frac{\psi}{r}\bigg|_{r=at}\mathrm{d}S\right].\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

式(4.3.12)称为泊松公式.

4.4 降 维 法

现在我们研究二维波动方程的柯西问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}), & (4.4.1)\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y), & (4.4.2)\\ u_t|_{t=0}=\psi(x,y). & (4.4.3)\end{cases}$$

我们利用上面的三维波动方程柯西问题求解的结果来解决这个问题,这是因为对于所考察的二维波动方程柯西问题的解 $u(x,y,t)$ 总可以看成是高一维空间 (x,y,z,t) 中的函数 $\tilde{u}(x,y,z,t)=u(x,y,t)$,但它和自变量 z 无关,因此满足三维波动方程

$$\tilde{u}_{tt}=a^2(\tilde{u}_{xx}+\tilde{u}_{yy}+\tilde{u}_{zz}) \tag{4.4.4}$$

及初始条件

$$\tilde{u}|_{t=0}=\varphi(x,y),\quad \tilde{u}_t|_{t=0}=\psi(x,y) \tag{4.4.5}$$

其中 $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ 也已视为空间 (x,y,z) 中的函数.反之,如果三维波动

方程的柯西问题(4.4.4),(4.4.5)的解 $\tilde{u}(x,y,z,t)$是一个与自变量 z 无关的函数,则它所满足的方程和初始条件都化为二维波动方程柯西问题(4.4.1)~(4.4.3)的解.我们如果解出三维波动方程的柯西问题(4.4.4),(4.4.5),并能证明这问题的解 $\tilde{u}(x,y,z,t)$是与 z 无关的函数,那么二维波动方程的柯西问题(4.4.1)~(4.4.3)也就能得到解决.这种利用高维波动方程柯西问题的解得出低维波动方程柯西问题解的方法称为降维法.

利用解三维波动方程柯西问题的泊松公式(4.3.12),得到

$$\tilde{u} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}^M}\frac{\varphi}{r}\mathrm{d}S\right\} + \frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}^M}\frac{\psi}{r}\mathrm{d}S,$$

这里的积分是在三维空间(x,y,z)中的球面 S_{at}^M上进行.由于 φ 及 ψ 都是和 z 无关的柱形函数,因此在球面上的积分可以化为它在超平面 $z=$常数上的投影 $\Sigma_{at}^M:(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant a^2t^2$ 上面的积分.注意到球面上的面积元素 $\mathrm{d}S$ 和它的投影元素 $\mathrm{d}\sigma$ 之间成立着如下的关系:

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}S\cos\gamma,$$

其中 γ 为这两个面积元素法线方向间的夹角(图 4.3),它可以表示为

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}{at}.$$

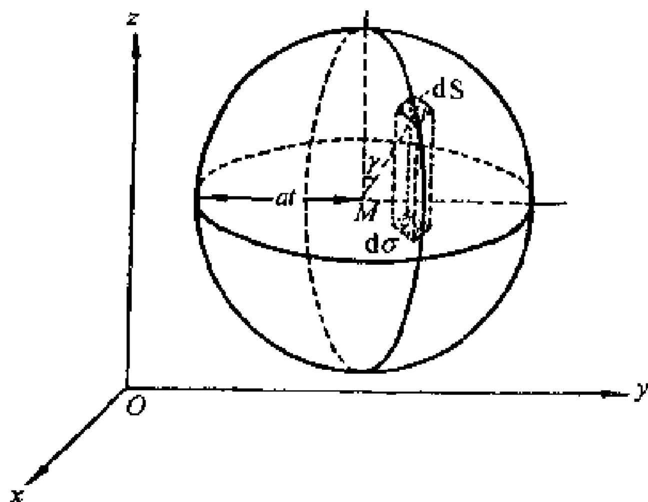


图 4.3

再注意到上下半球面的积分都化成同一圆上的积分,这样,就可以把 $\tilde{u}(x,y,z,t)$表示成

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(x,y,z,t) &= \tilde{u}(M,t) = u(x,y,t) \\
&= \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma_{at}^M}\frac{\varphi(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right. \\
&\quad \left. + \iint_{\Sigma_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x+r\cos\phi,y+r\sin\phi)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r\right. \\
&\quad \left. + \int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x+r\cos\phi,y+r\sin\phi)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r\right], \quad (4.4.6)
\end{aligned}
$$

它的确是和 z 无关的柱形函数.因此式(4.4.6)就给出所考察的二维波动方程的柯西问题的解,它称为二维波动方程柯西问题的泊松公式.

降维法不仅适用于波动方程,也适用于某些其他类型的方程.在许多情况下,此方法可以使我们从多个自变量方程的定解公式中,推导出自变量个数较少的方程的解答.

4.5　泊松公式的物理意义

由三维泊松公式(4.3.12)可知,定解问题(4.3.1)~(4.3.3)的解在(x,y,z,t)处的值,只要以点 $M(x,y,z)$为球心,以 at 为半径作出球面 S_{at}^M,然后把初始扰动 φ,ψ 代入式(4.3.12)即可求得.在式(4.3.12)中,积分只在球面 S_{at}^M上进行,所以只有与 M 相距为 at 的点上的初始扰动能影响到 u 的值.这就是说,对 $M_0(\xi,\eta,\zeta)$处的初始扰动,在时刻 t 只影响到以 M_0 为球心,以 at 为半径的球面上各点,这是因为以 S_{at}^M上任一点为球心,以 at 为半径所作的球面,都必经过 M_0 点,这表明扰动是以速度 a 传播的.

若设初始扰动只限于区域 D_0,任取一点 M,它与 D_0 的最小距离为 r,最大距离为 R(图 4.4),由泊松公式(4.3.12)知,当 $at<r$,即 $t<\frac{r}{a}$时,$u(x,y,z,t)=0$,这表明扰动的"前锋"还未来到;当 $r<at<R$,即$\frac{r}{a}<t<\frac{R}{a}$时,函数值 $u(x,y,z,t)\neq 0$,这表明扰动已经到达;当 $at>R$,即 $t>\frac{R}{a}$时,$u(x,y,z,t)=0$,这表明扰动的"阵尾"已经过去,并恢复了原来的状态,因此,当初始扰动限制在空间的某局部范围时,扰动有清晰的"前锋"与"阵尾",这种现象在物

理学中称为惠更斯(Huygens)原理或无后效现象.由于在点(ξ,η,ζ)的初始扰动是朝各方向传播的,在时刻t它的影响是在以点(ξ,η,ζ)为球心,at为半径的一个球面上,因此解(4.3.12)称为球面波.

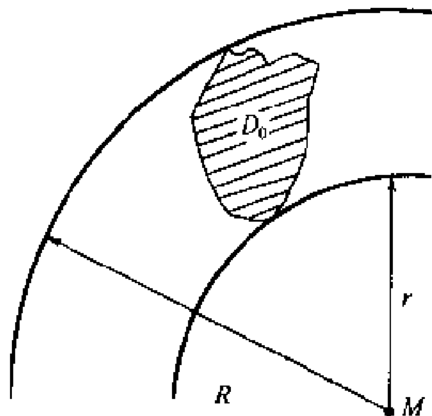


图 4.4

对于二维的情况,由公式(4.4.6)可知,要计算u在(x,y,t)处的值,只要以$M(x,y)$为中心,以at为半径作圆域Σ_{at}^M,然后把初始条件代入式(4.4.6)进行积分.此时,若初始扰动仍限于区域D_0,且r,R分别为点$M(x,y)$与D_0的最小和最大距离,则当$t<\frac{r}{a}$时,$u(x,y,t)=0$;当$\frac{r}{a}<t<\frac{R}{a}$时,$u(x,y,t)\neq 0$;当$t>\frac{R}{a}$时,由于圆域$\Sigma_{at}^M$包含了区域$D_0$,所以$u(x,y,t)$仍不为零,这表明在二维情况,局部范围内的初始扰动,具有长期连续的后效特性,扰动有清晰的"前锋",但却无"阵尾",这种情况称为有后效现象或称为波的弥散.

平面上的圆周$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=r^2$在空间是母线平行于z轴的圆柱面,所以在过点(ξ,η)平行于z轴的无限长直线上的初始扰动,在时间t后的影响是在以该直线为轴,at为半径的圆柱面内.因此二维波动方程的初值问题(4.4.1)~(4.4.3)的解(4.4.6)又称为柱面波.

4.6 非齐次波动方程柯西问题,推迟势

非齐次波动方程的柯西问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,z,t), & (4.6.1)\\ u|_{t=0}=\varphi, & (4.6.2)\\ u_t|_{t=0}=\psi, & (4.6.3)\end{cases}$$

总可以分解成两个问题来解决:第一个问题是求齐次方程(4.3.1)满足非齐次初始条件(4.6.2),(4.6.3)的解,这个解的求法已由前面的泊松公式(4.3.12)给出;第二个问题是求非齐次方程(4.6.1)满足齐次初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=0} = 0, & (4.6.4) \\ u_t|_{t=0} = 0 & (4.6.5) \end{cases}$$

的解.

上述的第二个问题这样求解,可以先求齐次方程的下述柯西问题的解 $\omega(x,y,z,t,\tau)$:

$$\omega_{tt} = a^2(\omega_{xx} + \omega_{yy} + \omega_{zz}), \qquad (4.3.1)$$

$$\begin{cases} \omega|_{t=\tau} = 0, & (4.6.6) \\ \omega_t|_{t=\tau} = f(x,y,z,\tau), & (4.6.7) \end{cases}$$

然后将 ω 关于参数 τ 积分,得到

$$u(x,y,z,t) = \int_0^t \omega(x,y,z,t,\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad (4.6.8)$$

它是柯西问题(4.6.1),(4.6.4),(4.6.5)的解.我们来验证这一结果.

首先验证由式(4.6.8)给出的函数 u 满足初始条件(4.6.4),(4.6.5).条件 $u|_{t=0}=0$ 的满足是显然的.今验证 $u_t|_{t=0}=0$.由于

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \omega(x,y,z,t,t) + \int_0^t \frac{\partial\omega(x,y,z,t,\tau)}{\partial t}\mathrm{d}\tau,$$

利用 ω 所满足的初始条件 $\omega|_{t=\tau}=0$,上式右端第一项等于零,而

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial\omega}{\partial t}\mathrm{d}\tau,$$

因此 $u_t|_{t=0}=0$.再验证函数 u 满足方程(4.6.1).为此,将上面最后一式再关于 t 微分一次,并注意到方程(4.3.1)及条件(4.6.7)得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left.\frac{\partial\omega(x,y,z,t,\tau)}{\partial t}\right|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial^2\omega(x,y,z,t,\tau)}{\partial t^2}\mathrm{d}\tau \\ &= f(x,y,z,t) + a^2\Delta\int_0^t \omega\mathrm{d}\tau = a^2\Delta u + f,\end{aligned}$$

其中 Δ 表示拉普拉斯算子.这就是说函数 u 满足方程.这样就证明了式(4.6.8)确实给出了柯西问题(4.6.1),(4.6.4),(4.6.5)的解.

现在我们把这个解明显地表示出来.根据泊松公式

$$\omega(x,y,z,t,\tau) = \frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{a(t-\tau)}^M}\left[\frac{f(\xi,\eta,\zeta,\tau)}{r}\right]_{r=a(t-\tau)}\mathrm{d}S,$$

因此

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a}\int_0^t\iint\limits_{S_{a(t-\tau)}^M}\left[\frac{f(\xi,\eta,\zeta,\tau)}{r}\right]_{r=a(t-\tau)}\mathrm{d}S\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\iint\limits_{S_r^M} \frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}\mathrm{d}S\mathrm{d}r \qquad \left(\tau = t - \frac{r}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{r\leqslant at} \frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}\mathrm{d}V, \tag{4.6.9}$$

其中 $\mathrm{d}V$ 表示体积元素,积分在以(x,y,z)为中心,at 为半径的球体中进行. 因此在时刻 t,位于 $M(x,y,z)$处函数 u 的数值由函数f 在时刻$\tau = t - \frac{r}{a}$处的值在此球中的体积积分表示. 称这样的积分为推迟势.

在二维的情况,我们可以进行类似的讨论.

【例 4.6.1】 求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + t\sin x, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = 0. & -\infty < x < +\infty, \\ u_t(x,0) = \sin x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

解 利用4.6节的结果知此非齐次方程初值问题的解可写成如下形式:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sin\xi\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\tau\sin\xi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{2a}[-\cos(x+at)+\cos(x-at)]$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\tau\{-\cos[x+a(t-\tau)]+\cos[x-a(t-\tau)]\}\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{a}\sin x\sin at + \frac{1}{a}\int_0^t\tau\sin x\sin a(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{a}\sin x\sin at + \frac{1}{a^2}\sin x\left(t - \frac{1}{a}\sin at\right),$$

即

$$u(x,t) = \frac{1}{a}\sin x\sin at + \frac{1}{a^2}\left(t - \frac{1}{a}\sin at\right)\sin x.$$

【例 4.6.2】 球对称情况下三维波动方程的解.

如果把波动函数用球面坐标(r,θ,φ)来表示,即 $u = u(r,\theta,\varphi,t)$,那么,所谓球对称就是指 u 与θ,φ 都无关. 因为在球面坐标系中,方程(4.3.1)表示为

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}.$$

当 u 不依赖θ 和φ 时,这个方程简化为

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right), \tag{*}$$

即

$$\frac{r}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2\frac{\partial u}{\partial r}.$$

由于

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\cdot u),$$

所以方程(*)化为

$$\frac{\partial^2(r\cdot u)}{\partial t^2}=u^2\frac{\partial^2(r\cdot u)}{\partial r^2}.$$

这是关于 ru 的一维波动方程,其通解是

$$ru=f_1(r-at)+f_2(r-at),$$

于是

$$u=\frac{1}{r}[f_1(r+at)+f_2(r-at)].$$

这就是三维波动方程的关于原点为球对称的通解.其中 f_1 和 f_2 是任意二次连续可微函数,他们可由定解问题中的初始条件来确定.例如,球对称时,初始条件(4.3.2),(4.3.3)化为

$$u|_{t=0}=\varphi(x,y,z)=\varphi(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)=\tilde{\varphi}(r),$$

$$u_t|_{t=0}=\psi(x,y,z)=\psi(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)=\tilde{\psi}(r).$$

而此时 $u=u(r,t)$,所以得

$$u(r,0)=\frac{1}{r}[f_1(r)+f_2(r)]=\tilde{\varphi}_0(r),$$

$$u_t(r,0)=\frac{a}{r}[f_1'(r)-f_2'(r)]=\tilde{\psi}(r).$$

解此二式得

$$f_1(r)=\frac{1}{2}r\tilde{\varphi}_0(r)+\frac{1}{2a}\int_0^r\xi\tilde{\psi}(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{C}{2},$$

$$f_2(r)=\frac{1}{2}r\tilde{\varphi}_0(r)-\frac{1}{2a}\int_0^r\xi\tilde{\psi}(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{C}{2}.$$

代入通解的表达式即得定解问题的球对称解

$$u(r,t)=\frac{1}{2r}[(r+at)\tilde{\varphi}(r+at)+(r-at)\tilde{\varphi}(r-at)]+\frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}\xi\tilde{\psi}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

【例 4.6.3】 已知 $\varphi(x,y,z)=x+y+z,\psi(x,y,z)=0$,试求方程(4.3.1)的初值问题(4.3.2)~(4.3.3)的解.

解 把给定的 $\varphi(x,y,z)$ 和 $\psi(x,y,z)$ 代入式(4.3.12),得解为

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t) &= \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{at}[x+y+z+at(\sin\theta\cos\varphi+\sin\theta \\
&\quad \cdot\sin\varphi+\cos\theta)](at)^2\sin\theta \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}[at(x+y+z)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&\quad + a^2t^2\int_0^{2\pi}(\sin\varphi+\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta + a^2t^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta] \\
&= x+y+z.
\end{aligned}
$$

4.7 两个自变量的二阶双曲型方程的特征线解法

本章开始曾利用将弦振动方程化成标准形式并沿特征线积分的方法求出了方程的解,现在我们把这一特征线解法推广到一般的两个自变量的二阶双曲型偏微分方程.

因为一般的两个自变量的二阶线性双曲型方程经过标准化后都可以化成如下的形式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y). \tag{4.7.1}$$

称形如(4.7.1)的双曲型方程为拉普拉斯双曲型方程(假设其系数 a,b,c,f 都是 x,y 的连续函数).

首先考察这种方程的一个简单并且重要的定解问题,设在两条相交的特征线段上给出的 u 的数值:

$$u|_{x=x_0}=\varphi_1(y)\quad(y_0\leqslant y\leqslant y_1), \tag{4.7.2}$$

$$u|_{y=y_0}=\varphi_2(x)\quad(x_0\leqslant x\leqslant x_1), \tag{4.7.3}$$

其中 $\varphi_1(y)$ 及 $\varphi_2(x)$ 具有连续的一阶导数,并且在 (x_0,y_0) 点满足衔接条件

$$\varphi_1(y_0)=\varphi_2(x_0), \tag{4.7.4}$$

要求在矩形 $R(x_0\leqslant x\leqslant x_1, y_0\leqslant y\leqslant y_1)$ 中确定方程(4.7.1)满足所给定解条件(4.7.2)~(4.7.4)的解.这样的定解问题称为古尔沙问题.它在这类双曲型方程的理论研究及实际应用中都起着重要的作用.例如在弦振动情况两个传播波发生干扰作用时可归结为这个问题,在物理中研究气体的吸收作用与退吸作用的过程以及干燥过程等问题时也都会遇到这样的定解问题.

我们证明,所提的古尔沙问题是适定的,它可以化为求解一组伏尔脱拉(Volterra)型积分方程的问题而解决.

我们先利用沿特征线求积分的方法把微分方程(4.7.1)化成积分方程组,然后利用逐次逼近法求出这问题的解.

如果问题(4.7.1)～(4.7.3)有解,令

$$\frac{\partial u}{\partial x}=v,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=w, \tag{4.7.5}$$

此时方程(4.7.1)可写为

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial x}=f(x,y)-a(x,y)v-b(x,y)w-c(x,y)u, \tag{4.7.6}$$

沿特征线 $x=\text{const}$ 及 $y=\text{const}$ 积分,立即得到

$$\begin{cases} v(x,y)=v(x,y_0)+\displaystyle\int_{y_0}^{y}[f(x,y)-a(x,y)v \\ \qquad\qquad -b(x,y)w-c(x,y)u]\mathrm{d}y, \\ w(x,y)=w(x_0,y)+\displaystyle\int_{x_0}^{x}[f(x,y)-a(x,y)v \\ \qquad\qquad -b(x,y)w-c(x,y)u]\mathrm{d}x, \\ u(x,y)=u(x,y_0)+\displaystyle\int_{y_0}^{y}w(x,y)\mathrm{d}y. \end{cases} \tag{4.7.7}$$

再按照边界条件(4.7.2),(4.7.3),我们有

$$v(x,y_0)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=y_0}=\varphi_2'(x),$$

$$w(x_0,y)=\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=x_0}=\varphi_1'(y),$$

代入式(4.7.7)即得到 u,v,w 应满足的积分方程组

$$\begin{cases} v(x,y)=\varphi_2'(x)+\displaystyle\int_{y_0}^{y}[f(x,y)-a(x,y)v \\ \qquad\qquad -b(x,y)w-c(x,y)u]\mathrm{d}y, \\ w(x,y)=\varphi_1'(y)+\displaystyle\int_{x_0}^{x}[f(x,y)-a(x,y)v \\ \qquad\qquad -b(x,y)w-c(x,y)u]\mathrm{d}x, \\ u(x,y)=\varphi_2(x)+\displaystyle\int_{y_0}^{y}w\mathrm{d}y. \end{cases} \tag{4.7.8}$$

反过来,可以证明,如果函数 u,v,w 满足积分方程组(4.7.8),那么函数 u 必满足方程(4.7.1)及定解条件(4.7.2),(4.7.3).事实上,将(4.7.8)中的第一式关于 y 求导,第二式关于 x 求导,即得到(4.7.6);将(4.7.8)的第三式

关于 y 求导,即得到(4.7.5)的第二式;把(4.7.8)的第三式关于 x 求导,并利用式(4.7.6)就有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi_2'(x) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}y \\ &= \varphi_2'(x) + \int_{y_0}^{y} [f(x,y) - a(x,y)v - b(x,y)w - c(x,y)u]\mathrm{d}y \\ &= v(x,y),\end{aligned}$$

因此(4.7.5)的第一式也满足了.从式(4.7.5)及(4.7.6)立即可以得知 u 满足方程(4.7.1).另外,由式(4.7.8)立刻可以得到

$$\begin{aligned} u|_{y=y_0} &= \varphi_2(x), \\ u|_{x=x_0} &= \varphi_2(x_0) + \int_{y_0}^{y} w|_{x=x_0}\mathrm{d}y \\ &= \varphi_2(x_0) + \int_{y_0}^{y} \varphi_1'(y)\mathrm{d}y \\ &= \varphi_2(x_0) + \varphi_1(y) - \varphi_1(y_0) = \varphi_1(y),\end{aligned}$$

因此函数 u 也满足定解条件(4.7.2).这样我们就证明了古尔沙问题(4.7.1)~(4.7.4)和积分方程组(4.7.8)的等价性.

积分方程组(4.7.8)是伏尔脱拉型方程组,这种方程组通常可用逐次逼近法求解.设取零次近似为

$$v_0 = \varphi_2'(x), w_0 = \varphi_1'(y), u_0 = \varphi_2(x), \tag{4.7.9}$$

把它代入式(4.7.8)的右边,得到三个新的函数,分别记为 v_1, w_1, u_1,取其作为第一次近似.一般地,如已得到第 $n-1$ 次近似 $v_{n-1}, w_{n-1}, u_{n-1}$,则第 n 次近似 v_n, w_n, u_n 可由下面迭代公式求得:

$$\begin{cases} v_n = \varphi_2'(x) + \displaystyle\int_{y_0}^{y} [f(x,y) - a(x,y)v_{n-1} \\ \qquad - b(x,y)w_{n-1} - c(x,y)u_{n-1}]\mathrm{d}y, \\ w_n = \varphi_1'(y) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} [f(x,y) - a(x,y)v_{n-1} \\ \qquad - b(x,y)w_{n-1} - c(x,y)u_{n-1}]\mathrm{d}x, \\ u_n = \varphi_2(x) + \displaystyle\int_{y_0}^{y} w_{n-1}\mathrm{d}y \\ \qquad (n = 1,2,\cdots). \end{cases} \tag{4.7.10}$$

如果能证明序列 $\{v_n\}, \{w_n\}, \{u_n\}$ 的一致收敛性,那么将(4.7.10)两边令

$n\to\infty$取极限,就知道极限函数 v,w,u 满足方程组(4.7.8).

现在来证明序列$\{v_n\},\{w_n\},\{u_n\}$在 R 上的一致收敛性.在 $n\geqslant 1$ 时,我们有

$$\begin{cases} v_{n+1}-v_n=-\int_{y_0}^{y}[a(x,y)(v_n-v_{n-1})+b(x,y)(w_n-w_{n-1}) \\ \qquad\qquad +c(x,y)(u_n-u_{n-1})]\mathrm{d}y, \\ w_{n+1}-w_n=-\int_{x_0}^{x}[a(x,y)(v_n-v_{n-1})+b(x,y)(w_n-w_{n-1}) \\ \qquad\qquad +c(x,y)(u_n-u_{n-1})]\mathrm{d}x, \\ u_{n+1}-u_n=\int_{y_0}^{y}(w_n-w_{n-1})\mathrm{d}y. \end{cases} \tag{4.7.11}$$

记

$$\begin{aligned} K&=\max_R(1+|a(x,y)|+|b(x,y)|+|c(x,y)|), \\ A&=\max_R(|v_0|,|w_0|,|u_0|,|f|) \\ &=\max_R(|\varphi_2'(x)|,|\varphi_1'(y)|,|\varphi_2(x)|,|f|), \end{aligned} \tag{4.7.12}$$

则利用数学归纳法不难证明

$$\begin{cases} |v_n-v_{n-1}|\leqslant K^nA\dfrac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}, \\ |w_n-w_{n-1}|\leqslant K^nA\dfrac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}, \\ |u_n-u_{n-1}|\leqslant K^nA\dfrac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}, \end{cases} \tag{4.7.13}$$

$$(n=1,2,\cdots).$$

事实上,当 $n=1$ 时由 A 及K 的选取知不等式(4.7.13)成立,今假设 $n=k$ 时式(4.7.13)成立,则当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned} |v_{k+1}-v_k|&\leqslant\int_{y_0}^{y}(|a|+|b|+|c|)K^kA\frac{(x+y-x_0-y_0)^k}{k!}\mathrm{d}y \\ &\leqslant AK^{k+1}\int_{y_0}^{y}\frac{(x+y-x_0-y_0)^k}{k!} \\ &\leqslant AK^{k+1}\left[\frac{(x+y-x_0-y_0)^{k+1}}{(k+1)!}-\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}\right] \end{aligned}$$

$$\leqslant AK^{k+1}\frac{(x+y-x_0-y_0)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

同样可以证明式(4.7.13)中其他的不等式.

从估计式(4.7.13)立刻可得级数

$$u_0+\sum_{k=1}^{\infty}(u_k-u_{k-1}),\quad v_0+\sum_{k=1}^{\infty}(v_k-v_{k-1}),$$

$$w_0+\sum_{k=1}^{\infty}(w_k-w_{k-1}),$$

在 R 上的绝对及一致收敛性,因此序列 $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ 及 $\{u_n\}$ 在 R 上是一致收敛的.

不难证明以上所考虑问题的解的惟一性,这只需证明当 $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x)$ 及 $f(x,y)$ 恒等于零时,方程(4.7.1)只有恒等于零的解.事实上,对于这样的解,若设 $|u|<B$, $|v|<B$, $|w|<B$,利用上面同样方法可以得到对于任何 n 都成立的估计式

$$\begin{cases} |u| = K^nB\dfrac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}, \\ |v| = K^nB\dfrac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}, \\ |w| = K^nB\dfrac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}. \end{cases} \tag{4.7.14}$$

令 $n\to\infty$,由式(4.7.14)立即得出所考虑的解只能恒等于零.再利用式(4.7.13),我们得到对于解 $u=u_0+\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1})$,下面估计式成立:

$$|u|\leqslant A+A\sum_{n=1}^{\infty}K^n\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}=Ae^{K(x+y-x_0-y_0)},$$

只要 $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_1'(y)$, $\varphi_2'(x)$ 及 $f(x,y)$ 足够小时,可使 A 小于任意指定的正数,由此得到所提定解问题的解的稳定性.

广义柯西问题 利用沿特征线进行积分的方法,同样可用来求解方程(4.7.1)的其他定解问题.回忆在弦振动方程的情形,将方程化成第一种标准形式后,原先的柯西问题就变为在直线 $\xi=\eta$ 上给出 u 及 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a\left(\dfrac{\partial u}{\partial \xi}-\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right)$ 的数值而进行求解.相应地对一般的拉普拉斯双曲型方程,我们提出如下的定解问题:在 (x,y) 平面某已知曲线 s 上给出 u 及任一不与 s 相切的方向 l 的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ 的值,要在曲线 s 的附近决定一连续可微函数,使它满足方程(4.7.1),并在曲线 s 上满足所给条件.这样的定解问题称为拉普拉斯双曲型

方程的广义柯西问题. 今假设曲线 s 是单调的,其方程为 $y=\mu(x)$,其中 $u(x)$为连续可微函数,$\mu'(x)\neq 0$. 不失普遍性[①],可以把广义柯西问题的定解条件写为

$$\begin{cases} u\big|_{y=\mu(x)} = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\mu(x)} = \psi(x), \end{cases} \tag{4.7.15}$$

并假设 $\varphi(x)\in C^1,\psi\in C$. 由于

$$\varphi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(x,\mu(x))) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mu'(x)\frac{\partial u}{\partial y},$$

因此从式(4.7.15)可求得

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=\mu(x)} = \varphi'(x) - \mu'(x)\psi(x). \tag{4.7.16}$$

令

$$v = \frac{\partial u}{\partial x},\quad w = \frac{\partial u}{\partial y},$$

沿特征曲线进行积分,就将方程(4.7.1)化为下面积分方程组:

$$\begin{cases} v(x,y) = v(x,\mu(x)) + \displaystyle\int_{\mu(x)}^{y}[f(x,y) - a(x,y)v \\ \qquad - b(x,y)w - c(x,y)u]\mathrm{d}y, \\ w(x,y) = w(\mu^{-1}(y),y) + \displaystyle\int_{\mu^{-1}(y)}^{x}[f(x,y) - a(x,y)v \\ \qquad - b(x,y)w - c(x,y)u]\mathrm{d}x, \\ u(x,y) = u(x,\mu(x)) + \displaystyle\int_{\mu(x)}^{y} w(x,y)\mathrm{d}y. \end{cases} \tag{4.7.17}$$

---

① 因为从

$$u\big|_{y=\mu(x)} = \varphi(x)\ 及\ \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{y=\mu(x)} = \psi(x)$$

可以知道,在曲线 s 上

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\mu'(x) = \varphi'(x)$$

及

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos(l,x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(l,y) = \psi(x),$$

只要 l 的方向不与曲线 s 相切,由这二式总可以求得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 在曲线 s 上的值.

其中出现的函数 $v(x,\mu(x))$，$w(\mu^{-1}(y),y)$ 及 $u(x,\mu(x))$ 可由定解条件(4.7.15)，(4.7.16)确定：

$$\begin{cases} v(x,\mu(x)) = \varphi'(x) - \mu'(x)\psi(x), \\ w(\mu^{-1}(y),y) = \psi(\mu^{-1}(y)), \\ u(x,\mu(x)) = \varphi(x). \end{cases} \tag{4.7.18}$$

伏尔脱拉型积分方程组(4.7.17)可以完全同前面一样用逐次逼近法求解.我们可以证明，如果定解条件(4.7.15)给在曲线 s 的一段 PQ 上，那么在过 P，Q 点所作特征线围成的矩形区域 $PNQM$（或曲边三角形区域 PQM 及 PNQ）（图 4.5）上存在着所提定解问题的惟一的解，而且这解具有对定解条件的稳定性.

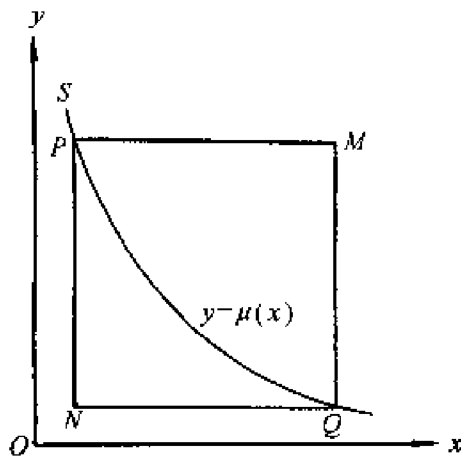


图 4.5

习　题

1．求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = \dfrac{1}{9} u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = x^2, & -\infty < x < +\infty, \\ u_t(x,0) = \sin x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

2．求解下列初值问题：

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, & -\infty < x < +\infty, \\ u_t(x,0) = x. & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

3．求解下列广义柯西问题：

$$\begin{cases} u_{xx}+2\cos x u_{xy}-\sin^2 x u_{yy}-\sin x u_y=0, \\ u\big|_{y=\sin x}=\phi(x), \\ u_y\big|_{y=\sin x}=\psi(x). \end{cases}$$

4. 求解三维波动方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), & -\infty<x,y,z<+\infty, t>0, \\ u\big|_{t=0}=x^3+y^2z, & -\infty<x,y,z<+\infty, \\ u_t\big|_{t=0}=0, & -\infty<x,y,z<+\infty. \end{cases}$$

5. 求解平面波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}), & -\infty<x,y<+\infty, t>0, \\ u\big|_{t=0}=x^2(x+y), & -\infty<x,y<+\infty, \\ u_t\big|_{t=0}=0, & -\infty<x,y<+\infty. \end{cases}$$

6. 求解非齐次方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+t\sin x, & -\infty<x<+\infty, t>0, \\ u(x,0)=\cos x, & -\infty<x<+\infty, \\ u_t(x,0)=\sin x, & -\infty<x<+\infty. \end{cases}$$

7. 求解非齐次方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+\dfrac{x}{(1+x)^2}, & -\infty<x<+\infty, t>0, \\ u(x,0)=0, & -\infty<x<+\infty, \\ u_t(x,0)=\dfrac{1}{1+x^2}, & -\infty<x<+\infty. \end{cases}$$

8. 求解三维非齐次方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+2(y-t), & -\infty<x,y,z<+\infty, t>0, \\ u\big|_{t=0}=0, & -\infty<x,y,z<+\infty, \\ u_t\big|_{t=0}=x^2+yz, & -\infty<x,y,z<+\infty. \end{cases}$$

9. 求解双曲型方程的古尔沙问题

$$\begin{cases} u_{xy}-u=0, \\ u(0,y)=e^y, \\ u(x,0)=e^x. \end{cases}$$

10. 求解双曲型方程的古尔沙问题

$$\begin{cases} u_{xy}=yu_y+2u, \\ u(0,y)=1, \\ u(x,0)=1. \end{cases}$$

11. 试将下列定解问题：

$$\begin{cases} u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f, & 0 < x < x_0, 0 < y < y_0, \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ u_y(\mu(y), y) = \psi(y), & 0 \leqslant y \leqslant y_0. \end{cases}$$

化成等价的积分方程组，其中 $x = \mu(y)$ 是第一象限中通过原点的单调增加的曲线，且

$$\phi(0) = \psi(0), \quad x_0 = \psi(y_0).$$

12. 试证方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

的通解可写成

$$u(x,t) = \frac{f(x - at) + g(x + at)}{h - x},$$

其中 f 和 g 是任意二次连续可微函数.

第五章　傅里叶级数

本章专门研究傅里叶级数的理论.虽然论述可以很广泛,但我们这里对理论的阐述较扼要,不过这对它在许多数学物理问题中的应用已经是足够用了.

三角级数的傅里叶理论在实际中很重要,这是因为某些类型的不连续函数不能展开为幂级数,但却能展开为傅里叶级数.而且更重要的是,相当广泛的一类物理和工程问题具有周期现象.因此,傅里叶的三角级数成为在这些问题的分析中的必不可少的工具.

首先我们研究实值函数的一些性质的基本概念和定义.

5.1　分段连续函数

如果当 x 从左边趋于 x_0 时,单值函数 $f(x)$ 的有限极限存在,我们就把这个有限极限定义为 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限,并记为 $f(x_0-)$.即,如果 h 是正数,那么

$$f(x_0-)=\lim_{h\to 0}f(x_0-h). \tag{5.1.1}$$

类似地,右极限定义为

$$f(x_0+)=\lim_{h\to 0}f(x_0+h) \tag{5.1.2}$$

(如图 5.1 所示).

注意,如果 $f(x)$ 在点 x_0 连续,那么

$$f(x_0-)=f(x_0+)=f(x_0).$$

因此,例如函数(见图 5.2)

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } 0\leqslant x<1,\\ x^2-\dfrac{1}{2}, & \text{当 } 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

有左极限 $f(1-)=1$ 与右极限 $f(1+)=\frac{1}{2}$.它在点 $x=1$ 处出现间断不连续性,其跃度是

$$f(1-)-f(1+)=\frac{1}{2}.$$

我们称区间 $[a,b]$ 上的单值函数 f 为分段连续函数,如果存在有限多个

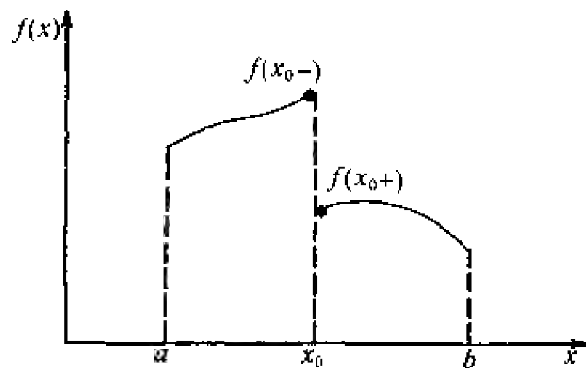


图 5.1

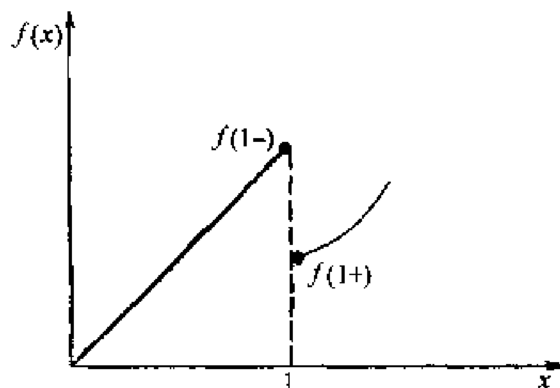


图 5.2

点 $a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，使得 f 在区间 $x_j<x<x_{j+1}$ 内是连续的，且单侧极限 $f(x_j+)$ 和 $f(x_{j+1}-)$ 对所有 $j=1,2,3,\cdots,n-1$ 都存在.

一个分段连续函数由图 5.3 表示. 像 $\frac{1}{x}$ 和 $\sin 1/x$ 这样的函数在闭区间 $[0,1]$ 上都不是分段连续的，因为在这两种情况下，单侧极限 $f(0+)$ 都不存在.

如果 f 在区间 $[a,b]$ 上是分段连续的，那么它在这区间上必是有界且可积的. 也能立即得到，两个分段连续函数的积在公共区间上也是分段连续的.

我们定义函数 $f(x)$ 在点 x_0 的**左导数**为

$$f'(x_0-)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-)-f(x_0-h)}{h}, \tag{5.1.3}$$

且定义函数 $f(x)$ 在点 x_0 的**右导数**为

$$f'(x_0+)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0+)}{h}, \tag{5.1.4}$$

其中 h 是正的增量.

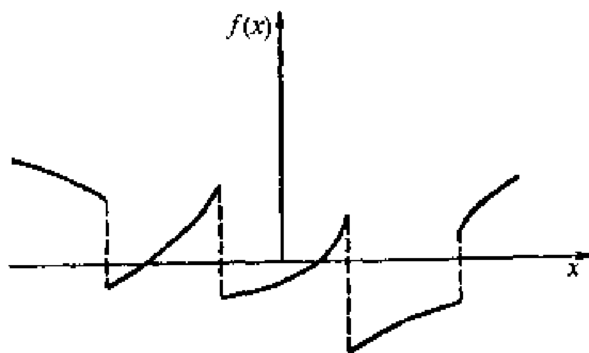


图 5.3

显然,如果 f 在点 x_0 有导数 f',那么在点 x_0 的左导数和右导数都存在而且等于 $f'(x_0)$. 但是,即使 $f(x)$ 在点 x_0 的左导数和右导数都存在,而函数 $f(x)$ 在点 x_0 可以是不可导的. 例如,函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x\leqslant 0,\\ \cos x, & \text{当 } x>0\end{cases}$$

在 $x=0$ 这一点有左导数和右导数,它们分别是 1 和 0,可是 $f'(0)$ 不存在.

如果 f 在区间 $[a,b]$ 上是分段连续的,另外,如果一阶导数 f' 在每一区间 $x_j<x<x_{j+1}$ 内是连续的,且极限 $f'(x_j+)$ 和 $f'(x_j-)$ 都存在,那么称 f 为分段光滑函数;又如果二阶导数 f'' 在每一区间 $x_j<x<x_{j+1}$ 内是连续的,且极限 $f''(x_j+)$ 和 $f''(x_j-)$ 都存在,那么称 f 为分段二阶光滑函数.

5.2　偶函数和奇函数

在分析中,函数的某些性质经常能明显地简化结果和大大地减少工作量. 在本节中,我们要介绍函数的一个有用的性质——函数的奇偶性.

如果函数 $f(x)$ 对任何 x,满足等式

$$f(-x)=f(x), \tag{5.2.1}$$

那么称为偶函数. 如果函数 $f(x)$ 对任何 x,满足等式

$$f(-x)=-f(x), \tag{5.2.2}$$

那么称为奇函数.

换句话说,偶函数的图形是关于 y 轴对称的,而奇函数的图形是关于原点对称的,如图 5.4 所示. 例如函数 x^2 与 $\cos x$ 都是偶函数,而函数 x 与 $\sin x$ 都是奇函数.

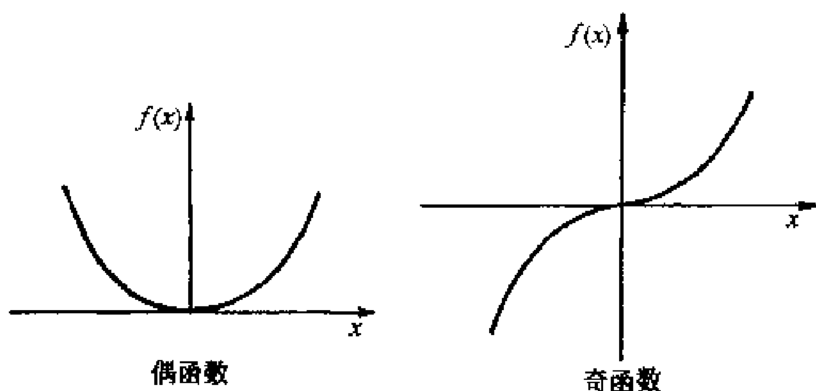


图 5.4

必须注意,并不是所有的函数或者是偶函数,或者是奇函数.有些函数,例如函数 e^x,既不是偶函数,也不是奇函数.但是,任何函数可以写成为一个偶函数与一个奇函数之和.例如

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)] \\ &= f_e(x)+f_o(x), \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

其中 f_e 和 f_o 分别表示偶函数和奇函数.例如,函数 e^x 可以写成

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2} \\ &= \cosh x+\sinh x, \end{aligned}$$

其中 $\cosh x$ 与 $\sinh x$ 分别是指数函数中的偶函数部分与奇函数部分.

【例 5.2.1】 已知 $f(x)=1+2x^2+3x^4$,我们用关系式(5.2.1)和(5.2.2)来检验这个函数.由于

$$f(-x)=1+2(-x)^2+3(-x)^4=1+2x^2+3x^4=f(x),$$

因此 $f(x)$是一个偶函数.

【例 5.2.2】 考察 $f(x)=x+\sin x$.像上面一样,我们看到

$$f(-x)=(-x)+\sin(-x)=-x-\sin x=-f(x),$$

这说明 $f(x)$是一个奇函数.

【例 5.2.3】 判定函数 $f(x)=e^x$ 的奇偶性.因为

$$f(-x)=e^{-x},$$

所以 $f(x)$既不是偶函数,也不是奇函数.这是由于负号不能从指数函数中作为因子分解出来,使得到的函数取得原来的形式.

偶函数和奇函数的对称性质在积分计算中有重要应用.如果 $f(x)$或是

偶函数,或是奇函数,那么只要 $f(x)$可积,我们就有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{当 } f(x) \text{ 是偶函数时}, \tag{5.2.4}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \text{当 } f(x) \text{ 是奇函数时}, \tag{5.2.5}$$

从图形上来看,如图 5.5 所示,积分表示介于 x 轴和曲线之间的面积.于是对偶函数来说,整个面积是从 O 到 a 的在曲线之下的面积的两倍,而对奇函数来说,从 $-a$ 到 O 的在曲线之上的负面积与从 O 到 a 的在曲线之下的正面积相消,使得总面积为零.

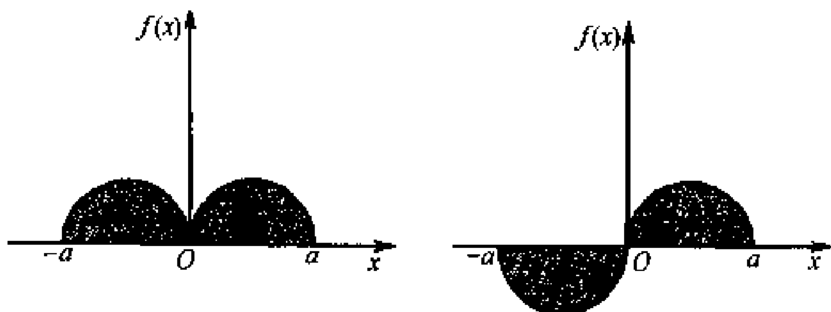


图 5.5

容易证明(见习题 4),偶函数乘以偶函数或奇函数乘以奇函数是偶函数,而偶函数乘以奇函数得到奇函数.

5.3 周期函数

一个分段连续函数 $f(x)$称为周期函数,如果存在正实数 p,使得

$$f(x+p) = f(x) \tag{5.3.1}$$

对一切 x 都成立.p 称为f 的周期,而 p 的最小值称为基本周期.在图 5.6 中,给出了一个周期函数的图形实例.

如果 f 是以 p 为周期的周期函数,那么

$$f(x+p)=f(x),$$
$$f(x+2p)=f(x+p+p)=f(x+p),$$
$$f(x+3p)=f(x+2p+p)=f(x+2p),$$
$$f(x+np)=f(x+(n-1)p+p)=f(x+(n-1)p)=f(x)$$

对任何正整数 n 都成立.而且容易推得

$$f(x+np) = f(x)$$

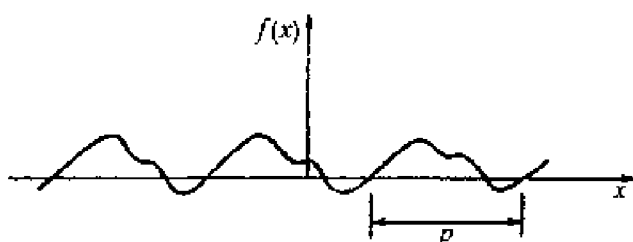


图 5.6

对 $n=0$ 及任何负整数 n 也都成立.因此,对一切整数 n,有

$$f(x+np)=f(x). \tag{5.3.2}$$

不难证明,如果 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 都有周期 p,且 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 都是常数,那么

$$f=c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_kf_k \tag{5.3.3}$$

有周期 p.

大家知道的周期函数的例子是正弦函数和余弦函数.作为一个特殊情形,常数函数也是周期函数,且以任何 p 为周期.因而,由关系式(5.3.3),如果级数

$$a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots$$

收敛,它显然有周期 2π.这种类型的级数经常在数学物理的问题中出现,将在以后加以讨论.

5.4 正 交 性

函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 称为在区间 $[a,b]$ 上是带权函数 $q(x)$ 正交的,如果

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)q(x)\mathrm{d}x=0,\quad (m\neq n). \tag{5.4.1}$$

如果 $m=n$,则我们有

$$\|\varphi_n\|=\left[\int_a^b \varphi_n^2 q\,\mathrm{d}x\right]^{1/2}, \tag{5.4.2}$$

这个值称为函数 $\varphi_n(x)$ 的模.

【例 5.4.1】 三角函数列 $\sin mx$, $m=1,2,\cdots$,在区间 $[-\pi,\pi]$ 上组成一正交系,因为

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & 当\ m\neq n,\\ \pi, & 当\ m=n.\end{cases}$$

在这个例子中,我们注意到权函数恒等于 1,且各函数的模都是 $\sqrt{\pi}$.

正交系 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$,其中 n 可以是有限或无限的,如果它满足关系式

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)q(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{当 } m \neq n, \\ 1, & \text{当 } m = n, \end{cases} \tag{5.4.3}$$

就称为在区间 $[a,b]$ 上的标准正交系.显然,一标准正交系可以由正交系的每个函数除以它的模而得到.

【例 5.4.2】 函数列

$$1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上组成正交系,因为

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{当 } m \neq n, \\ \pi, & \text{当 } m = n, \end{cases} \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \,\mathrm{d}x = 0, \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{当 } m \neq n, \\ \pi, & \text{当 } m = n \end{cases} \end{cases} \tag{5.4.4}$$

对正整数 m 和 n 都成立,而且

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \,\mathrm{d}x = 0.$$

为了使这个正交系标准化,我们把原来正交系中的每个元素除以它的模.因此

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\cdots$$

组成一标准正交系.

正交系的最重要的一个性质是每个正交系是线性无关的(见习题 9).很显然,这个结论对标准正交系也是成立的.

5.5 傅里叶级数

我们已经知道函数系

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots$$

在区间 $[-\pi,\pi]$ 上是正交的和线性无关的.于是我们作出一个形式级数与 $f(x)$ 对应,写成

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{5.5.1}$$

其中符号 ~ 表示 a_0,a_k 和 b_k 以某种惟一的方式与 f 的联系.这个级数可以收敛,也可以不收敛.用系数 $\frac{a_0}{2}$ 代替 a_0 是为了建立公式的方便.

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的黎曼可积函数. 假定我们定义级数的前 $2n+1$ 项的部分和 $s_n(x)$ 为

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx), \tag{5.5.2}$$

用来在 $[-\pi,\pi]$ 上表示 $f(x)$. 我们要找出系数 a_0, a_k 和 b_k, 使得 $s_n(x)$ 是在最小平方意义下表示 $f(x)$ 的最佳近似式, 即要找出 a_0, a_k 和 b_k, 使得积分

$$I(a_0, a_k, b_k) = \int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - s_n(x)]^2 dx \tag{5.5.3}$$

为极小值. 这是一个极值问题. 对于 a_0, a_k, b_k 使得 I 为极小的必要条件是 I 对这些系数的一阶偏导数都等于零. 于是把式(5.5.2)代入(5.5.3), 且对 a_0, a_k 和 b_k 求偏导数, 得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial a_0} = -\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n}(a_j\cos jx + b_j\sin jx)\Big]dx, & (5.5.4) \\ \dfrac{\partial I}{\partial a_k} = -2\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n}(a_j\cos jx + b_j\sin jx)\Big]\cos kx\, dx, & (5.5.5) \\ \dfrac{\partial I}{\partial b_k} = -2\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n}(a_j\cos jx + b_j\sin jx)\Big]\sin kx\, dx. & (5.5.6) \end{cases}$$

利用三角函数系的正交关系(5.4.4)和注意到

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\, dx = 0, \tag{5.5.7}$$

其中 m 和 n 都是正整数, 式(5.5.4), (5.5.5)和(5.5.6)变为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial a_0} = \pi a_0 - \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx, & (5.5.8) \\ \dfrac{\partial I}{\partial a_k} = 2\pi a_k - 2\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\, dx, & (5.5.9) \\ \dfrac{\partial I}{\partial b_k} = 2\pi b_k - 2\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\, dx. & (5.5.10) \end{cases}$$

因为 I 取得极值, 所以上述各式都必须等于零. 于是, 我们有

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx, & (5.5.11) \\ a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\, dx, & (5.5.12) \\ b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\, dx. & (5.5.13) \end{cases}$$

注意, 由于要求 a_0 是 a_k 的特殊情形, 所以在式(5.5.1)中, 第一项要写成 $\frac{a_0}{2}$

而不写成 a_0. 由式(5.5.8),(5.5.9)和(5.5.10),立即可得

$$\frac{\partial^2 I}{\partial a_0^2} = \pi, \tag{5.5.14}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial a_k^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial b_k^2} = 2\pi, \tag{5.5.15}$$

而且所有的二阶混合导数和其他一切余下的高阶偏导数都等于零. 现在如果把 I 展开成在$(a_0, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$附近的泰勒级数,就可得到

$$I(a_0 + \Delta a_0, \cdots, b_n + \Delta b_n) = I(a_0, \cdots, b_n) + \Delta I, \tag{5.5.16}$$

其中 ΔI 表示余项. 因为 I 的一阶偏导数,所有的二阶混合导数和其他一切余下的高阶偏导数都等于零,所以可得

$$\Delta I = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 I}{\partial a_0^2}\Delta a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 I}{\partial a_k^2}\Delta a_k^2 + \frac{\partial^2 I}{\partial b_k^2}\Delta b_k^2\right)\right]. \tag{5.5.17}$$

由于式(5.5.14)和(5.5.15),所以 ΔI 是正的. 因此,为了使 I 取得极小值,系数 a_0, a_k, b_k 必须分别由式(5.5.11),(5.5.12)和(5.5.13)定出. 这些系数称为 $f(x)$的傅里叶系数,而在式(5.5.1)中的级数称为对应于 $f(x)$的傅里叶级数.

注意,能用傅里叶级数对应于已知函数 $f(x)$,并不能推出这个傅里叶级数一定收敛于函数 $f(x)$. 事实上,存在发散的傅里叶级数. 此外,收敛的三角级数不一定是傅里叶级数. 例如,三角级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\lg n}$$

对一切 x 值都收敛,但因为不存在对应于这个级数的可积函数,所以这个三角级数不是傅里叶级数.

5.6　平均收敛　完备性

设 $f(x)$是以 2π 为周期的分段连续函数. 显然

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - s_n(x)]^2 \mathrm{d}x \geqslant 0, \tag{5.6.1}$$

其中

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

展开

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-s_n(x)]^2\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)s_n(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}[s_n(x)]^2\mathrm{d}x.$$

但是,根据傅里叶系数公式(5.5.11),(5.5.12)和(5.5.13)的定义与三角函数系的正交关系式(5.4.4),可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)s_n(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]\mathrm{d}x=\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) \tag{5.6.2}$$

与

$$\int_{-\pi}^{\pi}s_n^2(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2). \tag{5.6.3}$$

因而

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-s_n(x)]^2\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\left[\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\geqslant 0. \tag{5.6.4}$$

由此可见

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x \tag{5.6.5}$$

对于 n 的一切值成立.既然式(5.6.5)的右边与 n 无关,因此我们得到

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x, \tag{5.6.6}$$

这个不等式称为贝塞尔不等式.

我们知道上式左边的部分和是不减的,且有上界,因此级数

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) \tag{5.6.7}$$

收敛.于是,级数(5.6.7)收敛的必要条件是

$$\lim_{k\to\infty}a_k=0,\quad \lim_{k\to\infty}b_k=0. \tag{5.6.8}$$

如果当

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\right]^2\mathrm{d}x=0 \tag{5.6.9}$$

时,那么傅里叶级数称为平均收敛于 $f(x)$. 如果傅里叶级数平均收敛于 $f(x)$,那么

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x, \tag{5.6.10}$$

这个等式称为巴塞伐尔等式. 此外,如果关系式(5.6.9)成立,那么三角函数系 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots$ 就称为是完备的.

5.7 傅里叶级数的例题

5.5 节的傅里叶系数式(5.5.11),(5.5.12)和(5.5.13)可以由不同的方式得到. 假定周期为 2π 的函数 $f(x)$ 有展开式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{5.7.1}$$

如果假设这个无穷级数可以逐项求积(我们将在以后知道这个级数的一致收敛是逐项求积的充分条件),那么

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right]\mathrm{d}x = \pi a_0,$$

因此

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.7.2}$$

另外,我们把式(5.7.1)的两边都乘以 $\cos nx$,并且从 $-\pi$ 到 π 积分,就得到

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right]\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \pi a_n,\end{aligned}$$

即有

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x. \tag{5.7.3}$$

同样,可求得

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x. \tag{5.7.4}$$

刚才得到的系数 a_0, a_k, b_k 和在 5.5 节中得到的那些系数是完全相同的.

【例 5.7.1】 求由图 5.7 所表示的函数

$$f(x) = x + x^2, \ -\pi < x < \pi$$

的傅里叶级数展开式.

这里

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2\pi^2}{3},$$

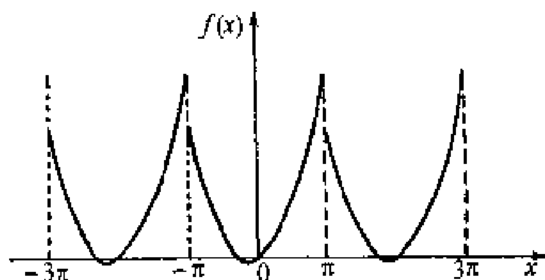


图 5.7

而

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\cos kx\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin kx}{k}\mathrm{d}x\right]$$
$$+\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\sin kx}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2x\sin kx}{k}\mathrm{d}x\right]$$
$$=-\frac{2}{k\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos kx}{k}\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{4}{k^2}\cos k\pi$$
$$=\frac{4}{k^2}(-1)^k\quad(k=1,2,3,\cdots).$$

又

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\sin kx\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos kx}{k}\mathrm{d}x\right]$$
$$+\frac{1}{\pi}\left[-x^2\frac{\cos kx}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2x\cos kx}{k}\mathrm{d}x\right]$$
$$=-\frac{2}{k}\cos k\pi+\frac{2}{k\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin kx}{k}\mathrm{d}x\right]$$

$$= -\frac{2}{k}\cos k\pi$$

$$= -\frac{2}{k}(-1)^k \quad (k = 1,2,3,\cdots).$$

因此 f 的傅里叶级数展开式是

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}(-1)^k\cos kx - \frac{2}{k}(-1)^k\sin kx$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + 2\sin x + \cos 2x - \sin 2x - \cdots.$$

级数的前两个部分和是

$$s_1 = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + 2\sin x,$$

$$s_2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + 2\sin x + \cos 2x - \sin 2x.$$

它们的图形如图 5.8 所示.可以看到在区间 $-\pi<x<\pi$ 内,前几项部分和已经对 f 提供了相当好的近似式.这种近似式对于 $-\pi<x<\pi$ 内的每一固定的 x,随着所取的项数的增大而得到改进,但是对于 $x=\pm\pi$ 却不是这样.在不连续点处的近似值的性质将在以后加以讨论.

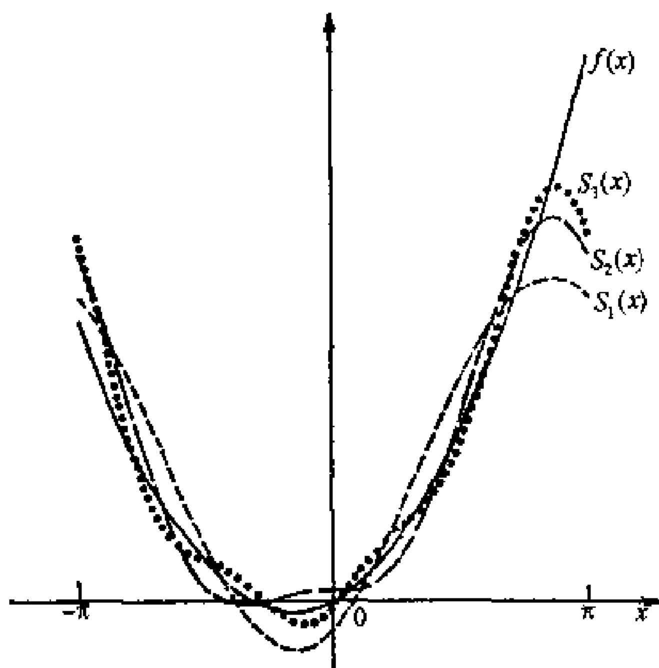


图 5.8

【例 5.7.2】 考察由图 5.9 所表示的周期函数

$$f(x)=\begin{cases}-\pi, & \text{当} -\pi<x<0,\\ x, & \text{当} 0<x<\pi.\end{cases}$$

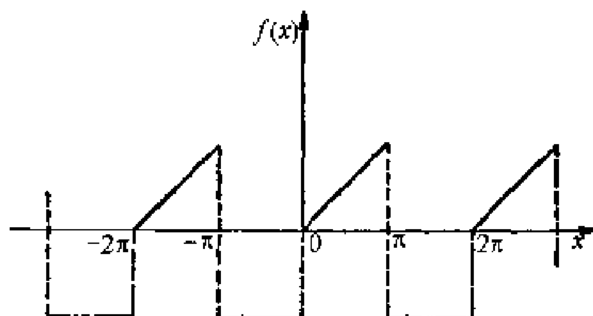


图 5.9

在这种情况下

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0}-\pi\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}x\mathrm{d}x\right]=-\frac{\pi}{2},$$

而

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-\pi\cos kx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}x\cos kx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{k^2\pi}(\cos k\pi-1)=\frac{1}{k^2\pi}[(-1)^k-1].\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}b_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-\pi\sin kx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}x\sin kx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{k}(1-2\cos k\pi)=\frac{1}{k}[1-2(-1)^k].\end{aligned}$$

因此傅里叶级数是

$$\begin{aligned}f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}&\frac{1}{k^2\pi}[(-1)^k-1]\cos kx\\&+\frac{1}{k}[1-2(-1)^k]\sin kx.\end{aligned}$$

【例 5.7.3】 考察在区间 $-\pi<x<\pi$ 内的函数 $f(x)=x$，如图 5.10 所

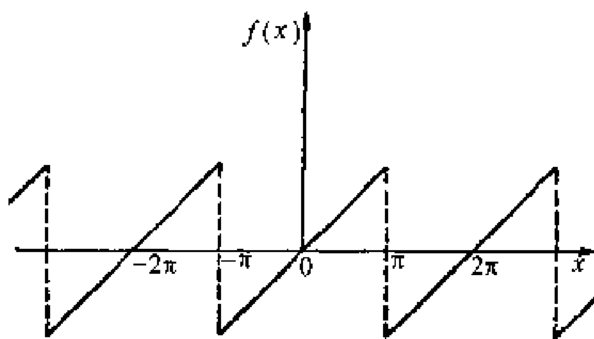


图 5.10

示. 我们首先确定

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\mathrm{d}x=0,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos kx\mathrm{d}x$$
$$=0\quad(k=1,2,3,\cdots).$$

这时系数 b_k 为

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin kx\mathrm{d}x=\frac{2}{k}(-1)^{k+1}.$$

因此

$$f(x)=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}.$$

5.8 余弦级数和正弦级数

设 $f(x)$是定义在区间$[-\pi,\pi]$上的偶函数. 因为 $\cos kx$ 是偶函数, $\sin kx$ 是奇函数, 所以函数 $f(x)\cos kx$ 是偶函数, 而函数$f(x)\sin kx$是奇函数. 于是, 利用式(5.2.4)和(5.2.5), 我们得到 $f(x)$的傅里叶系数是

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x\quad(k=0,1,2,\cdots),\tag{5.8.1}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x=0\quad(k=1,2,3,\cdots).$$

因此一偶函数的傅里叶级数可写成

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx,\tag{5.8.2}$$

其中系数 a_k 由公式(5.8.1)给出.

同样的,如果 $f(x)$ 是一奇函数,函数 $f(x)\cos kx$ 是奇函数,而函数 $f(x)\sin kx$ 是偶函数.所以在这种情况下,$f(x)$ 的傅里叶系数是

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = 0 \quad (k = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1,2,3,\cdots). \tag{5.8.3}$$

因此,一奇函数的傅里叶级数可写成

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \tag{5.8.4}$$

其中系数 b_k 由公式(5.8.3)给出.

【例 5.8.1】 试求出如图 5.11 所示的函数

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{当} -\pi < x < 0, \\ +1, & \text{当}\ 0 < x < \pi, \end{cases}$$

的傅里叶级数.

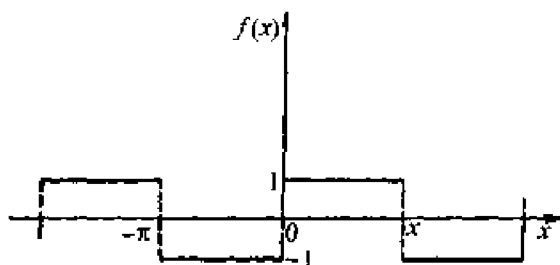


图 5.11

在这种情况下,因为 f 是奇函数,所以 $a_k = 0(k = 0,1,2,\cdots)$,而

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{k\pi}[1-(-1)^k].$$

于是 $b_{2k} = 0, b_{2k-1} = [4/\pi(2k-1)]$.因此,函数 $f(x)$ 的傅里叶级数是

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k-1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)}.$$

【例 5.8.2】 把 $|\sin x|$ 展开为傅里叶级数.因为 $|\sin x|$ 是偶函数,如图 5.12 所示,所以 $b_k = 0(k = 1,2,3,\cdots)$,而

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos kx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(1+k)x + \sin(1-k)x]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2[1+(-1)^k]}{\pi(1-k^2)} \quad (k = 0,2,3,\cdots).$$

当 $k=1$ 时，

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\mathrm{d}x = 0.$$

因此，$f(x)$的傅里叶级数是

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(1-4k^2)}.$$

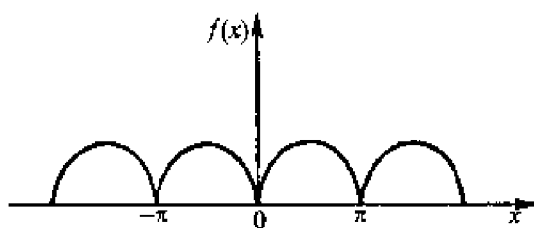


图 5.12

在前面几节中，我们在区间$(-\pi,\pi)$内已经给定了函数 $f(x)$，且假设$f(x)$在整个区间$(-\infty,\infty)$上是以 2π 为周期的函数. 实际上，我们经常碰到函数只定义在区间$(-\pi,\pi)$内的问题. 在这种情况下，我们只要把函数作以 2π 为周期的周期延拓，如图 5.13 所示. 这样，我们就能用傅里叶级数展开式表示函数 $f(x)$，尽管我们只对$(-\pi,\pi)$内的展开式感兴趣.

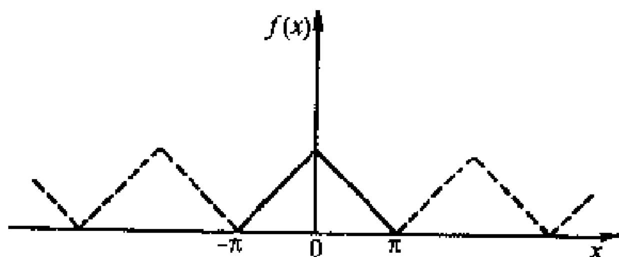


图 5.13

如果函数 f 只定义在区间$(0,\pi)$内，我们可用两种方法延拓 f. 第一种方法是作出 f 的偶延拓，由下述函数表达式来定义(见图 5.14)：

$$F_e(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } 0 < x < \pi, \\ f(-x), & \text{当 } -\pi < x < 0; \end{cases}$$

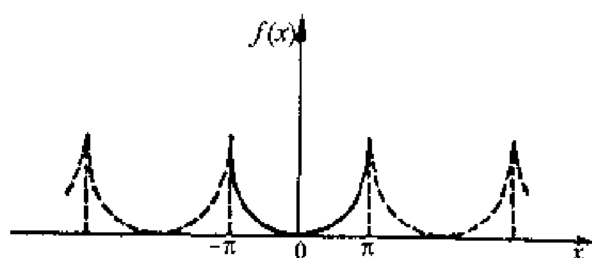


图 5.14

而第二种方法是作出 f 的奇延拓,由下述表达式来定义(见图 5.15):

$$F_o(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } 0 < x < \pi, \\ -f(-x), & \text{当 } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

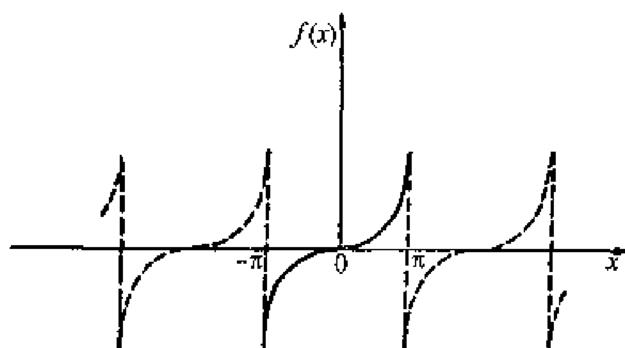


图 5.15

因为 $F_e(x)$ 和 $F_o(x)$ 分别是以 2π 为周期的偶函数和奇函数,所以 $F_e(x)$ 和 $F_o(x)$ 的傅里叶级数展开式分别是

$$F_e(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

其中

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x$$

和

$$F_o(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

其中

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x.$$

5.9 复数形式的傅里叶级数

有时用复数形式的展开式来表示函数是方便的.这个展开式可以容易地由下列傅里叶级数导出:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

注意到

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\quad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},$$

我们可写出

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\left(\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\right)+b_k\left(\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right)\right]\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_k-ib_k}{2}\right)e^{ikx}+\left(\frac{a_k+ib_k}{2}\right)e^{-ikx}\right]\\&=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}(c_ke^{ikx}+c_{-k}e^{-ikx}),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}c_0&=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\\c_k&=\frac{a_k-ib_k}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos kx-i\sin kx)dx\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx,\\c_{-k}&=\frac{a_k+ib_k}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos kx+i\sin kx)dx\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{ikx}dx.\end{aligned}$$

于是,我们得到 $f(x)$ 的复数形式的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx},\quad -\pi<x<\pi,\tag{5.9.1}$$

其中

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx.\tag{5.9.2}$$

【例 5.9.1】 试求出下列函数的复数形式的傅里叶级数展开式:

$$f(x)=e^{x},\quad -\pi<x<\pi.$$

我们可以得到

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{x}e^{-ikx}dx$$
$$=\frac{(1+ik)(-1)^k}{\pi(1-k^2)}\sinh\pi.$$

于是,傅里叶级数是

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(1+ik)(-1)^k}{\pi(1+k^2)}\sinh\pi e^{ikx}.$$

5.10 区间的变换

到目前为止,我们已讨论了定义在区间$[-\pi,\pi]$上的函数.可是在许多应用中,这个区间是有局限性的,而大家感兴趣的区间可以是任意的,如$[a,b]$.

如果我们用变换

$$x=\frac{1}{2}(b+a)+\frac{(b-a)}{2\pi}t \tag{5.10.1}$$

引入新变量 t,那么区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 就变为$-\pi\leqslant t\leqslant\pi$.于是,显然函数

$$f[(b+a)/2+((b-a)/2\pi)t]\equiv F(t)$$

可作以 2π 为周期的周期延拓.把这个函数展开成傅里叶级数,得到

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt), \tag{5.10.2}$$

其中

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\cos kt\,dt\quad(k=0,1,2,\cdots),$$
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\sin kt\,dt\quad(k=1,2,3,\cdots).$$

再把 t 变成x,就得到在$[a,b]$上的 $f(x)$的展开式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\frac{k\pi(2x-b-a)}{(b-a)}+b_k\sin\frac{k\pi(2x-b-a)}{(b-a)}\right], \tag{5.10.3}$$

其中

$$a_k=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{k\pi(2x-b-a)}{(b-a)}dx\qquad(k=0,1,2,\cdots), \tag{5.10.4}$$

$$b_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{k\pi(2x-b-a)}{(b-a)}\mathrm{d}x \qquad (k=1,2,3,\cdots). \tag{5.10.5}$$

有时我们取函数 f 定义在$[-l,l]$这个区间上较方便.由刚才得到的结果立刻可得出,只要令 $a=-l$ 与 $b=l$,f 在$[-l,l]$上的展开式就具有下列形式:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{5.10.6}$$

其中

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (k=0,1,2,\cdots), \tag{5.10.7}$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (k=1,2,3,\cdots). \tag{5.10.8}$$

如果 f 是以 $2l$ 为周期的偶函数,那么由式(5.10.6),不难确定

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l}, \tag{5.10.9}$$

其中

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (k=0,1,2,\cdots). \tag{5.10.10}$$

如果 f 是以 $2l$ 为周期的奇函数,那么由式(5.10.6),f 的展开式是

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{5.10.11}$$

其中

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (k=1,2,3,\cdots). \tag{5.10.12}$$

【例 5.10.1】 考察如图 5.16 所示的周期奇函数

$$f(x) = x, \quad -2 < x < 2.$$

这里 $l=2$.因为 f 是奇函数,所以 $a_k=0$,且

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{k\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{4}{k\pi}(-1)^k \quad (k=1,2,3,\cdots).$$

因此,f 的傅里叶级数是

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k\pi}(-1)^{k+1}\sin\frac{k\pi x}{2}.$$

【例 5.10.2】 已知函数

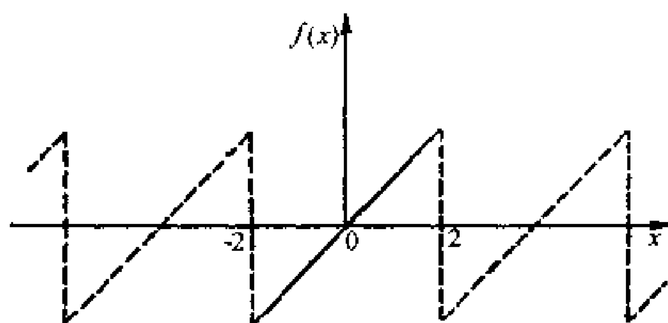


图 5.16

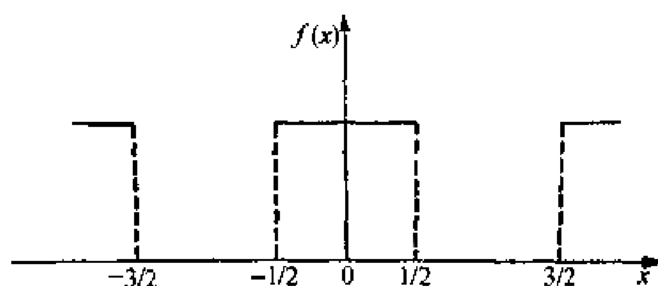


图 5.17

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}\, 0<x<\dfrac{1}{2},\\[2mm] 0, & \text{当}\, \dfrac{1}{2}<x<1.\end{cases}$$

在这种情况下,周期是 $2l=2$ 或 $l=1$.延拓 f 如图 5.17 所示.因为是偶延拓,所以有 $b_k=0$,且

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{1}\int_0^{1/2}\mathrm{d}x=1,$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{1}\int_0^{1/2}\cos k\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}.$$

因此

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)\pi}(-1)^{k-1}\cos(2k-1)\pi x.$$

5.11 傅里叶级数的逐点收敛性

早些时候我们已经讲过,如果 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上分段连续,那么存

在一个傅里叶级数展开式，它平均收敛于 $f(x)$.

在本节中，我们将研究已知函数的傅里叶级数的逐点收敛性. 首先，考察

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

其中

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1,2,3,\cdots).$$

设 $s_n(x)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶级数的前 $2n+1$ 项的部分和：

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

把 a_k 和 b_k 代入 $s_n(x)$ 中，就得到

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t\right]\cos kx \right.\\ &\quad \left. + \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t\right]\sin kx\right\} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx)\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{5.11.1}$$

把三角恒等式

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos k\alpha = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha$$

从 $k=1$ 到 $k=n$ 加起来，可得

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha\right] &= \sin\frac{\alpha}{2} + \left[\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right] \\ &\quad + \cdots + \left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha\right] \\ &= \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha. \end{aligned} \tag{5.11.2}$$

然后在式(5.11.1)中利用式(5.11.2)，得到

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(n+1/2)(t-x)}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\mathrm{d}t. \tag{5.11.3}$$

引入新变量 $s=t-x$，可得

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(s+x)\frac{\sin(n+1/2)s}{2\sin(s/2)}\mathrm{d}s. \tag{5.11.4}$$

现在,如果 $f(x)$是以 2π 为周期的分段连续函数,那么 $s_n(x)$也是以 2π 为周期的函数(见习题 28).于是

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s+x)\frac{\sin(n+1/2)s}{2\sin(s/2)}\mathrm{d}s, \tag{5.11.5}$$

这个等式称为 s_n 的狄利克莱公式.核

$$\frac{\sin(n+1/2)s}{2\sin(s/2)} \tag{5.11.6}$$

称为狄利克莱核,它是以 2π 为周期的函数,且

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)s}{2\sin(s/2)}\mathrm{d}s = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ks\right]\mathrm{d}s = 1. \tag{5.11.7}$$

引理 5.11.1 (黎曼-勒贝格引理) 如果 $g(x)$在区间$[a,b]$上分段连续,那么

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = 0. \tag{5.11.8}$$

证明 考察积分

$$I(\lambda) = \int_a^b g(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x. \tag{5.11.9}$$

用变量变换

$$x = t + \pi/\lambda,$$

可得

$$\sin\lambda x = \sin\lambda(t+\pi/\lambda) = -\sin\lambda t$$

和

$$I(\lambda) = -\int_{a-\pi/\lambda}^{b-\pi/\lambda} g(t+\pi/\lambda)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t. \tag{5.11.10}$$

因为 t 是积分变量,我们可把上述积分写成

$$I(\lambda) = -\int_{a-\pi/\lambda}^{b-\pi/\lambda} g(x+\pi/\lambda)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x. \tag{5.11.11}$$

把式(5.11.9)与式(5.11.11)加起来,得到

$$\begin{aligned}2I(\lambda) &= \int_a^b g(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x - \int_{a-\pi/\lambda}^{b-\pi/\lambda} g(x+\pi/\lambda)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_{a-\pi/\lambda}^{a} g(x+\pi/\lambda)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x + \int_{b-\pi/\lambda}^{b} g(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\\ &\quad + \int_a^{b-\pi/\lambda}[g(x)-g(x+\pi/\lambda)]\sin\lambda x\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{5.11.12}$$

首先,设 $g(x)$是在$[a,b]$上的连续函数,那么 $g(x)$必定是有界的,即存在 M,使得$|g(x)|\leqslant M$.因此

$$\left|\int_{a-\pi/\lambda}^{a} g(x+\pi/\lambda)\sin\lambda x\,dx\right| = \left|\int_{a}^{a+\pi/\lambda} g(x)\sin\lambda x\,dx\right| \leqslant \frac{\pi M}{\lambda}$$

和

$$\left|\int_{b-\pi/\lambda}^{b} g(x)\sin\lambda x\,dx\right| \leqslant \frac{\pi M}{\lambda}.$$

因而

$$|I(\lambda)| \leqslant \frac{\pi M}{\lambda} + \int_{a}^{b-\pi/\lambda} |g(x) - g(x+\pi/\lambda)|\,dx. \quad (5.11.13)$$

因为 $g(x)$在闭区间$[a,b]$上是连续函数,所以它在$[a,b]$上是一致连续的,因此

$$|g(x) - g(x+\pi/\lambda)| < \varepsilon/(b-a) \quad (5.11.14)$$

对于一切 $\lambda > \Lambda$ 和在$[a,b]$中的一切 x 成立.我们现在选择 Λ,使得当 $\lambda > \Lambda$ 时,$\pi M/\lambda < \varepsilon/2$.于是

$$|I(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

如果 $g(x)$是在$[a,b]$上的分段连续函数,那么在每个 $g(x)$是连续的$[a,b]$的子区间上,重复应用上面的论证,即可得出引理的证明.

定理 5.11.1 (逐点收敛定理) 如果 $f(x)$是以 2π 为周期的函数,且 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上是分段光滑的,那么对任何 x 有

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)], \quad (5.11.15)$$

其中

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad (k = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad (k = 1,2,3,\cdots).$$

证明 我们有

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+s)\,\frac{\sin(n+1/2)s}{2\sin(s/2)}\,ds \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+s)\,\frac{\sin(n+1/2)s}{2\sin(s/2)}\,ds \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+s)\,\frac{\sin(n+1/2)s}{2\sin(s/2)}\,ds. \end{aligned}$$

以 I_1 记第一个积分,有

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x+s) - f(x-) + f(x-)]\frac{\sin(n+1/2)s}{2\sin(s/2)}\mathrm{d}s. \tag{5.11.16}$$

利用等式(5.11.7),可得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-)\frac{\sin(n+1/2)s}{2\sin(s/2)}\mathrm{d}s = \frac{f(x-)}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)s}{2\sin(s/2)}\mathrm{d}s$$
$$= \frac{f(x-)}{2}.$$

于是

$$I_1 = \frac{f(x-)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x+s) - f(x-)}{2\sin(s/2)}\sin(n+1/2)s\mathrm{d}s.$$

但是因为 $f(x)$ 是分段光滑的,所以极限

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(x+s) - f(x-)}{2\sin(s/2)} = \lim_{s\to 0}\left[\frac{f(x+s) - f(x-)}{s}\right]\frac{s}{2\sin(s/2)}$$
$$= \lim_{s\to 0}\left[\frac{f(x+s) - f(x-)}{s}\right] = f'(x-)$$

存在.因此,函数

$$\frac{f(x+s) - f(x-)}{2\sin(s/2)}$$

是分段连续的.根据黎曼-勒贝格引理,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x+s) - f(x-)}{2\sin(s/2)}\sin(n+1/2)s\mathrm{d}s = 0.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} I_1 = \frac{f(x-)}{2}.$$

同样,如果记

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+s)\frac{\sin(n+1/2)s}{2\sin(s/2)}\mathrm{d}s,$$

可证得

$$\lim_{n\to\infty} I_2 = \frac{f(x+)}{2}.$$

最后,我们有

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty}(I_1 + I_2) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)].$$

由此

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)].$$

本定理证毕.

在 $f(x)$ 的连续点上，$f(x+)=f(x-)=f(x)$. 在这种情况下，有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=f(x).$$

【例 5.11.1】 在 5.7 节的例 5.7.1 中，我们已得到在 $[-\pi,\pi]$ 上的函数 $x+x^2$（如图 5.18 所示）的傅里叶级数展开式是

$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos kx-\frac{2}{k}(-1)^k\sin kx.$$

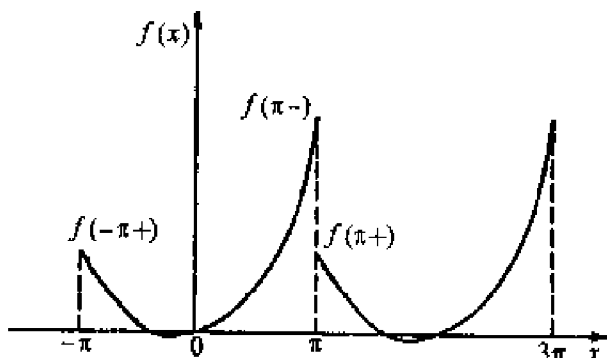


图 5.18

因为 $f(x)=x+x^2$ 是分段光滑的，所以这个级数收敛. 因此在 $f(x)$ 的连续点上，我们可写出

$$x+x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos kx-\frac{2}{k}(-1)^k\sin kx.$$

在 $f(x)$ 的不连续点上，例如 $x=\pi$，由逐点收敛定理与

$$f(\pi-)=\pi+\pi^2,\quad f(\pi+)=f(-\pi+)=-\pi+\pi^2,$$

所以有

$$\frac{1}{2}[(\pi+\pi^2)+(-\pi+\pi^2)]=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos k\pi.\quad(5.11.17)$$

简化上式得出

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^{2k}$$

或

$$\pi^2/6=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

5.12 傅里叶级数的一致收敛性

在上一节中,我们已经对分段光滑函数证明了傅里叶级数的逐点收敛性.这里,我们将考察另一个重要的关于一致收敛性的定理.

利用贝塞尔不等式不难得到一致收敛性的简单证明.

定理 5.12.1(一致收敛性和绝对收敛性) 设 $f(x)$是以 2π 为周期的连续函数,且 $f'(x)$在区间$[-\pi,\pi]$上是分段连续的.另外,如果 $f(-\pi)=f(\pi)$,那么 $f(x)$的傅里叶级数展开式是一致收敛且绝对收敛的.

证明 设 $f(x)$和 $f'(x)$的傅里叶级数分别是

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{5.12.1}$$

和

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kx+B_k\sin kx). \tag{5.12.2}$$

因为 f'是分段连续的,且 $f(-\pi)=f(\pi)$,所以对一切 $k>0$,有

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}[f(\pi)-f(-\pi)]=0,$$

$$\begin{aligned}A_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos kx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}[f(x)\cos kx]_{-\pi}^{\pi}\\&\quad+\frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x=kb_k,\end{aligned} \tag{5.12.3}$$

$$\begin{aligned}B_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin kx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}[f(x)\sin kx]_{-\pi}^{\pi}-\frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x=-ka_k.\end{aligned} \tag{5.12.4}$$

此外,A_k 和B_k 满足贝塞尔不等式,即

$$\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^2+B_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2\mathrm{d}x<\infty. \tag{5.12.5}$$

现在由式(5.12.3)和(5.12.4),我们写出

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)^{1/2}=\sum_{k=1}^{n}[k^{-2}(A_k^2+B_k^2)]^{1/2}. \tag{5.12.6}$$

对上式右边应用许瓦尔兹不等式(见习题 27)后,上式变为

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)^{1/2}\leqslant\Big[\sum_{k=1}^{n}k^{-2}\Big]^{1/2}\Big[\sum_{k=1}^{n}(A_k^2+B_k^2)\Big]^{1/2}. \tag{5.12.7}$$

由式(5.12.5),显然级数

$$\sum_{k=1}^{n}(A_k^2+B_k^2)$$

当 $n\to\infty$ 时趋于有限极限,而且级数

$$\sum_{k=1}^{n}k^{-2}$$

是二阶调和级数,当 $n\to\infty$ 时也趋于有限极限.因此,存在常数 M,使得

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)^{1/2}\leqslant M.$$

因为上式左边是正的,且以 M 为上界,所以当 $n\to\infty$ 时,它必须趋于有限极限.于是级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)^{1/2}$$

收敛.接下来考察

$$a_k\cos kx+b_k\sin kx=(a_k^2+b_k^2)^{1/2}\cos(kx-\theta),$$

其中 $\theta=\arctan(b_k/a_k)$.注意到 $|\cos(k\theta-x)|\leqslant 1$,所以对于一切 x,有 $|a_k\cos kx+b_k\sin kx|\leqslant(a_k^2+b_k^2)^{1/2}$.因为数项级数

$$\left|\frac{a_0}{2}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)^{1/2}$$

收敛,所以应用魏尔斯特拉斯的优级数判别法,可知级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

一致收敛和绝对收敛,且实际上,根据逐点收敛定理,它收敛于 $f(x)$.本定理证毕.

在上面这个定理中,我们曾经假设 $f(x)$ 是连续的,且 $f'(x)$ 是分段连续的.对 f 适当放宽条件,我们可叙述下列定理,而不予证明.

定理 5.12.2　设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上是分段光滑的.如果 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数,那么 f 的傅里叶级数在每个不含 f 的不连续点的闭区间上一致收敛于 f(见习题 29).

注意,在含有 f 的不连续点的任何区间上,傅里叶级数的部分和不能一致趋于函数 $f(x)$.在这样的区间上,$s_n(x)$ 与 $f(x)$ 的偏差的状态称为吉布斯现象.例如,在例 5.8.1 中,函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & 当 -\pi<x<0,\\ 1 & 当 0<x<\pi,\end{cases}$$

的傅里叶级数为

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)}.$$

如果画出部分和 $s_n(x)$的图形,如图 5.19 所示,我们发现 s_n 在 f 的图形上下摆动.可以看出,在不连续点 $x=0$ 和 $x=\pi$ 的附近,s_n 与函数 f 的偏差是相当显著的.虽然在区间内的任何点上,摆动的大小随 n 增大而无限减小,但在非常接近不连续点处,虽然 n 增大,但摆动的振幅实际上与 n 无关,而不是无限减小的.这个现象说明函数 f 的傅里叶级数在任何包含不连续点的区间上是不一致收敛的.

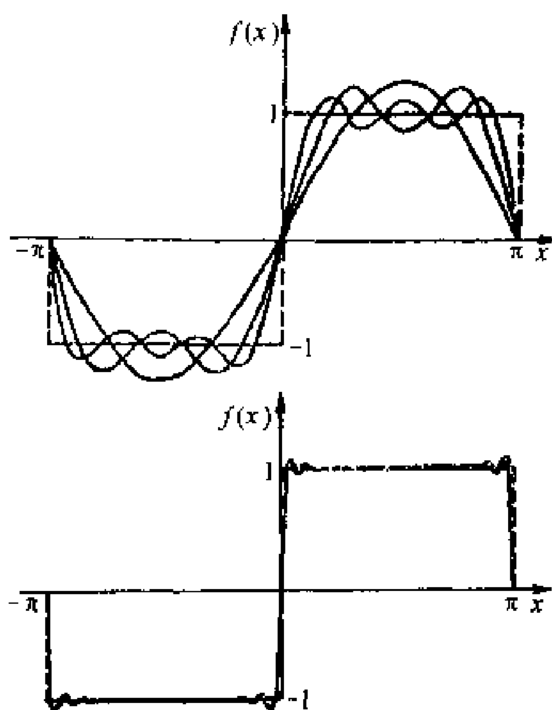


图 5.19

5.13 傅里叶级数的微分法和积分法

傅里叶级数的逐项微分一般是不允许的.例如,$f(x)=x$ 的傅里叶级数(例 5.7.3)是

$$x=2\left[\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\right],$$

它对于一切 x 收敛.但当上述级数形式地逐项微分后,级数

$$2[\cos x-\cos 2x+\cos 3x-\cdots]$$

对于一切 x 发散.问题在于当$[-\pi,\pi]$上的已知函数 $f(x)=x$ 作周期延拓时,在点 $\pm\pi,\pm3\pi,\cdots$上是不连续的.在下面将看到,周期函数的连续性是傅里叶级数的逐项微分所必需具备的条件之一.

定理 5.13.1 (逐项微分定理) 设 $f(x)$是区间$[-\pi,\pi]$上的连续函数,且 $f(-\pi)=f(\pi)$,又 $f'(x)$在这区间上是分段光滑的,那么 f' 的傅里叶级数可以由 f 的傅里叶级数逐项微分得到,且逐项微分后的级数逐点收敛于 f'.

证明 设 f 和f'的傅里叶级数分别是

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

和

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kx+B_k\sin kx),$$

在 5.12 节定理 12.1 中已证明,如果 $f(-\pi)=f(\pi)$,我们有 $A_0=0,A_k=kb_k$ 和$B_k=-ka_k(k=1,2,3,\cdots)$.于是

$$f'(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$$

变成

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-ka_k\sin kx+kb_k\cos kx),$$

这正好是逐项微分下列等式所得到的结果:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

在 $f'(x)$的不连续点上,逐项微分在下述意义下仍成立:

$$\frac{1}{2}[f'(x+)+f'(x-)]=\sum_{k=1}^{\infty}(-ka_k\sin kx+kb_k\cos kx).$$

因为 f'是分段光滑的,所以根据定理 5.12.2,逐项微分所得到的级数在连续点上逐点收敛于 $f'(x)$,而在不连续点上收敛于$[f'(x+)+f'(x-)]/2$.本定理证毕.

傅里叶级数的逐项积分比逐项微分在一般的条件下是可以实现的.我们记得在微积分学中,为了保证逐项求积后的级数的收敛性,被积函数的级数必须是一致收敛的.但是,就傅里叶级数来说,这个条件不是必需的.

定理 5.13.2 (逐项积分定理) 设 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上是分段连续的,且是以 2π 为周期的函数,那么不管 f 的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

是否收敛,它总可以在任何积分限之间逐项求积.

证明 我们要证

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{a_0}{2}\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_a^b (a_k\cos kx + b_k\sin kx)\mathrm{d}x\right], \tag{5.13.1}$$

这只要证明

$$\int_a^b \left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}[a_k(\sin kb - \sin ka) - b_k(\cos kb - \cos ka)]$$

就够了.首先,我们定义 $F(x)$为

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t.$$

因为 f 是分段连续的,所以 F 是连续的,而且

$$F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$$

是分段连续的.此外,因为 f 是以 2π 为周期的函数,而且

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x,$$

所以有

$$F(x+2\pi) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t + \int_x^{x+2\pi}\left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t$$
$$= F(x) + \int_{-\pi}^{\pi}\left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t = F(x).$$

因为刚才已证明了 F 是连续周期函数,且具有分段连续的一阶导数,所以我们可以把 F 展开成傅里叶级数

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kx + B_k\sin kx).$$

根据定理 5.12.1,这个级数是一致收敛且绝对收敛的.在那个定理中,也证明了当 $k=1,2,3,\cdots$时,有

$$A_k = -b_k/k, \quad B_k = a_k/k,$$

因此

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}(a_k\sin kx - b_k\cos kx)\right].$$

由 $F(x)$的定义,可得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{a_0 x}{2} + \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(a_k\sin kx - b_k\cos kx).$$

因为

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_0^b f(t)\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\mathrm{d}t,$$

所以我们有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}(b-a) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(a_k\sin kb - b_k\cos kb)$$
$$- \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(a_k\sin ka - b_k\cos ka).$$

因为这些级数都是绝对收敛的,所以我们可以把它们的项重新排列而得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}(b-a)$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}[a_k(\sin kb - \sin ka) - b_k(\cos kb - \cos ka)],$$

这正好是由 $f(x)$的傅里叶级数形式地逐项求积所得到的结果.本定理证毕.

【例 5.13.1】 在例 5.8.2 中,我们已经得到 $f(x)=|\sin x|$可表示为傅里叶级数

$$\sin x = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(1-4k^2)},\quad 0<x<\pi.$$

因为 $f(x)=|\sin x|$在区间$[-\pi,\pi]$上是连续的,且 $f(-\pi)=f(\pi)$,又因为 $f'(x)$在$[-\pi,\pi]$上是分段光滑的,利用定理 13.1,对上面的傅里叶级数可以逐项微分,面得到

$$\cos x = -\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin 2kx}{(1-4k^2)}.$$

这样,我们得到余弦函数在$(0,\pi)$内的傅里叶级数展开式.注意,上述这个方法倒过来做是不允许的.

【例 5.13.2】 在区间$-\pi<x<\pi$内考察函数 $f(x)=x$.因为在例 5.7.3 中已给出

$$x = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right],$$

由定理 13.2,我们可以从 a 到x 逐项积分上述级数,得到

$$\frac{1}{2}(x^2-a^2) = 2\left[-\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)\right.$$
$$\left.+\left(\cos a - \frac{\cos 2a}{2^2} + \frac{\cos 3a}{3^2} - \cdots\right)\right].$$

为了确定常数项级数的和,我们写成

$$\frac{x^2}{4} = C - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos kx}{k^2},$$

其中 C 是一常数.因为上式右边的级数是傅里叶级数,它是一致收敛的,所以可从 $-\pi$ 到 π 逐项积分级数,得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} dx = 2\left[\int_{-\pi}^{\pi} C dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx\right],$$

即

$$\frac{\pi^3}{3} = 2(2\pi C).$$

因此

$$C = \frac{\pi^2}{12}.$$

所以,通过在 $(-\pi,\pi)$ 内逐项积分 $f(x)=x$ 的傅里叶级数,我们得到函数 $f(x)=x^2$ 的傅里叶级数展开式为

$$x^2 = 4\left[\frac{\pi^2}{12} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos kx}{k^2}\right].$$

5.14 二重傅里叶级数

两个变量的函数的级数展开式的理论与单变量函数的级数展开式的理论是类似的.这里我们将简单地叙述一下二重傅里叶级数的结果.

在前面已经知道,如果 $f(x)$ 是以 2π 为周期的分段连续函数,那么傅里叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

平均收敛于 $f(x)$.如果 f 是连续可微的,那么它的傅里叶级数是一致收敛的.

为了简便起见,让我们考察两个变量的连续可微(这是比必需的条件强的条件)函数 $f(x,y)$.设 $f(x,y)$ 是以 2π 为周期的函数,即

$$f(x+2\pi,y) = f(x,y+2\pi) = f(x,y),$$

那么,如果把 y 固定,我们可把 $f(x,y)$ 展开为一致收敛的傅里叶级数

$$f(x,y) = \frac{a_0(y)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m(y)\cos mx + b_m(y)\sin mx], \quad (5.14.1)$$

其中系数都是 y 的函数,即

$$a_m(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\cos mx\, dx,$$

$$b_m(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\sin mx\, dx.$$

这些系数都是对 y 连续可微的,因此,我们又可把它们展开为一致收敛的级数

$$\begin{cases} a_m(y) = \dfrac{a_{m0}}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{mn}\cos ny + b_{mn}\sin ny), \\ b_m(y) = \dfrac{c_{m0}}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_{mn}\cos ny + d_{mn}\sin ny), \end{cases} \tag{5.14.2}$$

其中

$$\begin{cases} a_{mn} = \dfrac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\cos mx\cos ny\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ b_{mn} = \dfrac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\cos mx\sin ny\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ c_{mn} = \dfrac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\sin mx\cos ny\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ d_{mn} = \dfrac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\sin mx\sin ny\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{cases} \tag{5.14.3}$$

把 a_m 和 b_m 代入式(5.14.1),可得

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[a_{0n}\cos ny + b_{0n}\sin ny] \\ & + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}[a_{m0}\cos mx + c_{m0}\sin mx] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[a_{mn}\cos mx\cos ny + b_{mn}\cos mx\sin ny \\ & + c_{mn}\sin mx\cos ny + d_{mn}\sin mx\sin ny], \end{aligned} \tag{5.14.4}$$

这个二重级数称为**二重傅里叶级数**.

(a)当 $f(-x,y)=f(x,y)$ 和 $f(x,-y)=f(x,y)$ 时,除了 a_{mn} 外,所有的系数都等于零,且二重傅里叶级数化为

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_{0n}\cos ny + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m0}\cos mx \\ & + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\cos mx\cos ny, \end{aligned} \tag{5.14.5}$$

其中

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\cos mx\cos ny\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(b)当 $f(-x,y)=f(x,y)$ 和 $f(x,-y)=-f(x,y)$ 时,有

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_{0n}\sin ny+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}\cos mx\sin ny,\tag{5.14.6}$$

其中

$$b_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}f(x,y)\cos mx\sin ny\,dx\,dy.$$

(c)当 $f(-x,y)=-f(x,y)$ 和 $f(x,-y)=f(x,y)$ 时，有

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}c_{m0}\sin mx+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{mn}\sin mx\cos ny,\tag{5.14.7}$$

其中

$$c_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}f(x,y)\sin mx\cos ny\,dx\,dy.$$

(d)当 $f(-x,y)=-f(x,y)$ 和 $f(x,-y)=-f(x,y)$ 时，有

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}d_{mn}\sin mx\sin ny,\tag{5.14.8}$$

其中

$$d_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}f(x,y)\sin mx\sin ny\,dx\,dy.$$

【例 5.14.1】 在区域 $-\pi<x<\pi,-\pi<y<\pi$ 内把函数 $f(x,y)=xy$ 展开为二重傅里叶级数.

因为 $f(-x,y)=-xy=-f(x,y)$ 和 $f(x,-y)=-xy=-f(x,y)$，所以可得

$$d_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}xy\sin mx\sin ny\,dx\,dy=(-1)^{m+n}\frac{4}{mn}.$$

于是，f 在 $-\pi<x<\pi,-\pi<y<\pi$ 内的二重傅里叶级数是

$$f(x,y)=4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{\sin mx\sin ny}{mn}.$$

习　题

1. 指出下列函数在已知区间上是否是分段连续函数.在每一种情况下，确定其右极限和左极限：

(a) $$f(x)=\begin{cases}x, & 当\ 0\leqslant x<1,\\ 0, & 当\ 1<x\leqslant 2;\end{cases}$$

(b) $$f(x)=\begin{cases}0, & 当\ -1\leqslant x<0,\\ 1/x, & 当\ 0<x\leqslant 1;\end{cases}$$

(c) $$f(x)=\begin{cases}2, & 当\ 0\leqslant x<1,\\ x^2, & 当\ 1<x\leqslant 2;\end{cases}$$

(d) $$f(x)=\begin{cases}1-x, & 当 1\leqslant x<2,\\ x/(x-2), & 当 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

2. 如果在(a,b)内的每一点上，$f'(x+)$，$f'(x-)$都存在，而且$f'(a+)$及$f'(b-)$也都存在，就称f在$[a,b]$上为殆可微函数. 证明：如果f在$[a,b]$上是分段光滑的，那么f在$[a,b]$上是殆可微的. 给出一个反例，说明其逆命题是不成立的.

3. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些是既非奇函数又非偶函数.

(a) $x+2x^2+3x^3$;　　(b) x^2+4x^4;

(c) $x\ln x$;　　(d) $1/x$;

(e) e^{x^2};　　(f) $x^2\sin x$;

(g) $x^2\cos x$;　　(h) $\sinh x$.

4. 设具有下标 e 和 o 的函数分别表示偶函数和奇函数，证明：

(a) $f_eg_e=h_e$;　　(b) $f_og_o=h_e$;

(c) $f_eg_o=f_og_e=h_o$;　　(d) $f_e+g_e=h_e$;

(e) $f_o+g_o=h_o$.

5. 设$f(x)$在区间$[0,l)$上连续可微，且$f'(0+)$存在. 又$f'(0+)=f(0)=0$. 证明在$(-l,l)$上的f的奇延拓F_0在$(-l,l)$上是连续可微的.

6. 确定下列函数中哪些是周期函数，并对周期函数求出最小正周期：

(a) $\sin 3x$;　　(b) $\cos x/2$;　　(c) $\cos 2\pi x$;

(c) $x\cos x$;　　(e) $\cos x+\cos\pi x$;　　(f) $x^2\cos x$.

7. 设$f(x)$是以p为周期的函数，证明

$$\int_a^{a+p}f(x)\mathrm{d}x=\int_b^{b+p}f(x)\mathrm{d}x.$$

8. 证明多项式系$1,x,(3x^2-1)/2$在区间$[-1,1]$上是正交的.

9. 证明每个正交系是线性无关的.

10. 证明惟一性定理：如果f_1和f_2都在$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$上连续，并具有同样的傅里叶级数，那么$f_1=f_2$.

11. 证明魏尔斯特拉斯逼近定理：如果函数f在区间$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$上连续，且$f(-\pi)=f(\pi)$，那么对任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个三角多项式

$$T(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

使得当一切x在$[-\pi,\pi]$上时，有

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon.$$

12. 求下列各函数的傅里叶级数：

(a) $$f(x)=\begin{cases}x, & 当 -\pi<x<0,\\ h(h 为常数), & 当 0<x<\pi;\end{cases}$$

(b) $$f(x)=\begin{cases}1, & 当 -\pi<x<0,\\ x^2, & 当 0<x<\pi;\end{cases}$$

(c) $f(x)=x+\sin x$,　$-\pi<x<\pi$;

(d) $f(x)=1+x$, $-\pi<x<\pi$;

(e) $f(x)=e^x$, $-\pi<x<\pi$;

(f) $f(x)=1+x+x^2$, $-\pi<x<\pi$.

13. 确定下列各函数的傅里叶正弦级数:

(a) $f(x)=\pi-x$, $0<x<\pi$;

(b) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0<x<\pi/2,\\ 2, & \text{当 } \pi/2<x<\pi;\end{cases}$

(c) $f(x)=x^2$, $0<x<\pi$;

(d) $f(x)=\cos x$, $0<x<\pi$;

(e) $f(x)=x^3$, $0<x<\pi$;

(f) $f(x)=e^x$, $0<x<\pi$.

14. 求出下列各函数的傅里叶余弦级数展开式:

(a) $f(x)=\pi+x$, $0<x<\pi$;

(b) $f(x)=x$, $0<x<\pi$;

(c) $f(x)=x^2$, $0<x<\pi$;

(d) $f(x)=\sin 3x$, $0<x<\pi$;

(e) $f(x)=e^x$, $0<x<\pi$;

(f) $f(x)=\cosh x$, $0<x<\pi$.

15. 把下列各函数展开为傅里叶级数:

(a) $f(x)=x^2+x$, $-1<x<1$;

(b) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0<x<3,\\ 0, & \text{当 } 3<x<6;\end{cases}$

(c) $f(x)=\sin\pi x/l$, $0<x<l$;

(d) $f(x)=x^3$, $-2<x<2$;

(e) $f(x)=e^{-x}$, $0<x<1$;

(f) $f(x)=\sinh x$, $-1<x<1$.

16. 求下列各函数的复数形式的傅里叶级数:

(a) $f(x)=e^{2x}$, $-\pi<x<\pi$;

(b) $f(x)=\cosh x$, $-\pi<x<\pi$;

(c) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } -\pi<x<0;\\ \cos x, & \text{当 } 0<x<\pi;\end{cases}$

(d) $f(x)=x$, $-1<x<1$;

(e) $f(x)=x^2$, $-\pi<x<\pi$;

(f) $f(x)=\sinh\pi x/2$, $-2<x<2$.

17. 通过对适当的傅里叶级数的逐项微分来确定下列各函数的傅里叶级数展开式:

(a) $\sin^2 x$, $0<x<\pi$;

(b) $\cos^2 x$, $0<x<\pi$;

(c) $\sin x\cos x$, $0<x<\pi$;

(d) $\cos x + \cos 2x, \quad 0 < x < \pi$;

(e) $\cos x \cos 2x, \quad 0 < x < \pi$.

18. 求出由下列各级数从 0 到 x 逐项积分得到的新级数所表示的函数：

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx = \frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi$;

(b) $\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k} \sin kx = \begin{cases} 1, & 当 -\pi < x < 0, \\ 2, & 当 0 < x < \pi; \end{cases}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos kx}{k} = \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right), \quad -\pi < x < \pi$;

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^2 x - \pi x^2}{8}, \quad 0 < x < 2\pi$;

(e) $\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)} = \begin{cases} -1, & 当 -\pi < x < 0, \\ 1, & 当 0 < x < \pi. \end{cases}$

19. (a) 求下列函数的傅里叶级数展开式：

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 当 -\pi < x < 0, \\ x/2, & 当 \ 0 < x < \pi; \end{cases}$$

(b) 利用求得的这个级数，证明

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots.$$

20. (a)确定下列函数的傅里叶级数：

$$f(x) = x^2, \quad -l < x < l;$$

(b) 利用求得的这个级数，证明

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots.$$

21. 画出题 12 中的函数 f 与部分和 s_1 及 s_2 的图形.

22. 设 $\{\varphi_n(x)\}$ 是在 $[a,b]$ 上的正交系. 如果

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$$

存在，那么

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

这个级数称为 f 的广义傅里叶级数. 证明贝塞尔不等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

23. 设 f 和 g 是两个在 $[-\pi,\pi]$ 上分段连续且以 2π 为周期的函数，如果 a_k，b_k 和 c_k，d_k 分别是 f 和 g 的傅里叶系数，证明

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k c_k + b_k d_k).$$

24. 改进下列级数的收敛性：

(a) $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{n^4-1}\sin nx,\ -\pi<x<\pi;$

(提示:由于 $n^3/(n^4-1)=(1/n)+1/(n^5-n)$,证明

$$f(x)=-\frac{x}{2}+\sin x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n^5-n}.$$

注意,系数为 $1/(n^5-n)$的级数比系数为 $n^3/(n^4-1)$的级数收敛得快.)

(b) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+n+1}{n(n^3+1)}\sin nx.$

(提示:

$$\frac{n^3+n+1}{n(n^3+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3+1}$$

和

$$\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},0<x<2\pi.)$$

25. 把下列函数 $f(x)$看作是两个函数的和,确定 f 的傅里叶级数:

(a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 当-\pi<x<0,\\ \frac{1}{4}(\pi x-1), & 当\ 0<x<\pi\end{cases}$

(提示:$f(x)=g(x)-\frac{1}{4}h(x)$,其中

$$g(x)=\begin{cases}0, & 当-\pi<x<0,\\ \frac{1}{4}\pi x, & 当 0<x<\pi,\end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases}-1, & 当-\pi<x<0,\\ 1, & 当 0<x<\pi.)\end{cases}$$

(b) $f(x)=\begin{cases}0, & 当-\pi<x<0,\\ 1, & 当\ 0<x<\pi.\end{cases}$

(提示:$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}g(x)$,其中

$$g(x)=\begin{cases}-1, & 当-\pi<x<0,\\ 1, & 当\ 0<x<\pi.)\end{cases}$$

26. (a)画出下列函数在区间$[-4,-2]$和$[2,4]$上的图形:

$$f(x)=\begin{cases}1, & 当-2<x<-1,\\ -1, & 当-1<x<1,\\ 1, & 当\ 1<x<2;\end{cases}$$

(b)确定 f 的傅里叶级数在

(i) $x=2k$,

(ii) $x=2k+1$

上的值,其中 k 是正整数.

27. 证明许瓦尔兹不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_kB_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}A_k^2\sum_{k=1}^{\infty}B_k^2.$$

28. 如果 $f(x)$ 是在 $[-\pi,\pi]$ 上分段连续且以 2π 为周期的函数，那么函数

$$f(s+x)\frac{\sin(n+1/2)s}{2\sin(s/2)}$$

也是在 $[-\pi,\pi]$ 上分段连续且以 2π 为周期的函数.

29. 证明一分段二阶光滑的连续周期函数的傅里叶级数在一切 x 上一致收敛于这函数.

30. 函数 f 称为在 x_0 处满足 α 阶的李普希茨条件，如果存在正的常数 M 和 δ，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<M|x-x_0|^{\alpha},$$

其中 α 是正数，且 $\alpha\leqslant 1$.

证明：如果 f 连续且在 x_0 处满足李普希茨条件，那么 f 的傅里叶级数在 x_0 处收敛于 $f(x_0)$.

31. 如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上是周期的、分段连续的、有有限个极大值与极小值的，那么我们称 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足狄利克莱条件. 证明：如果 $f(x)$ 满足狄利克莱条件，那么 f 的傅里叶级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]$.

(注意：狄利克莱条件比逐点收敛定理中的条件弱.)

32. 求出下列各函数的二重傅里叶级数：

(a) $f(x,y)=1,\quad 0<x<\pi,\quad 0<y<\pi;$

(b) $f(x,y)=xy^2,\quad 0<x<\pi,\quad 0<y<\pi;$

(c) $f(x,y)=x^2y^2,\quad 0<x<\pi,\quad 0<y<\pi;$

(d) $f(x,y)=x^2+y,\quad -\pi<x<\pi,\quad -\pi<y<\pi;$

(e) $f(x,y)=x\sin y,\quad -\pi<x<\pi,\quad -\pi<y<\pi;$

(f) $f(x,y)=e^{x+y},\quad -\pi<x<\pi,\quad -\pi<y<\pi.$

33. 导出函数 $f(x,y)$ 在矩形 $-a<x<a,-b<y<b$ 内的一般二重傅里叶级数展开式.

第六章　分离变量法

6.1　分离变量

在本章中,我们将介绍初边值问题的最常用和最基本的一种解法,即分离变量法.可用分离变量法来解的这类问题中包含范围很广的数学物理问题.

我们现在对两个自变量的二阶偏微分方程来说明分离变量的方法,并考察能用这种方法来解的条件.

考虑二阶齐次方程

$$a^* u_{x^*x^*} + b^* u_{x^*y^*} + c^* u_{y^*y^*} + d^* u_{x^*} + e^* u_{y^*} + f^* u = 0, \tag{6.1.1}$$

其中 a^*, b^*, c^*, d^*, e^* 和 f^* 都是 x^* 与 y^* 的函数.

在第三章中我们已经指出,通过变量变换

$$\begin{cases} x = x(x^*, y^*), \\ y = y(x^*, y^*), \end{cases} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(x^*, y^*)} \neq 0, \tag{6.1.2}$$

总可以把方程(6.1.1)化为下列标准形式:

$$a(x,y)u_{xx} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = 0, \tag{6.1.3}$$

而且

(i)当 $a \equiv -c$ 时,它是双曲型的;

(ii)当 $a \equiv 0$ 或 $c \equiv 0$ 时,它是抛物型的;

(iii)当 $a \equiv c$ 时,它是椭圆型的.

假设方程的解的形式为

$$u(x,y) = X(x)Y(y), \tag{6.1.4}$$

其中 X 和 Y 分别是单个变量 x 和单个变量 y 的二次可微函数.把式(6.1.4)代入方程(6.1.3),则得

$$aX''Y + cXY'' + dX'Y + eXY' + fXY = 0, \tag{6.1.5}$$

其中 X 和 Y 右上角的撇号"′"表示对各自的变量求导数.假设存在一个函数 $p(x,y)$,使得方程(6.1.5)除以 $p(x,y)$ 后,能变为

$$a_1(x)X''Y + b_1(y)XY'' + a_2(x)X'Y$$

$$+ b_2(y)XY' + [a_3(x) + b_3(y)]XY = 0. \tag{6.1.6}$$

再把方程(6.1.6)除以 XY,得到

$$\left(a_1 \frac{X''}{X} + a_2 \frac{X'}{X} + a_3\right) = -\left(b_1 \frac{Y''}{Y} + b_2 \frac{Y'}{Y} + b_3\right). \tag{6.1.7}$$

等式(6.1.7)的左边只是 x 的函数,而右边只是 y 的函数,因此把式(6.1.7)对 x 微分,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_1 \frac{X''}{X} + a_2 \frac{X'}{X} + a_3\right) = 0. \tag{6.1.8}$$

把式(6.1.8)积分,就得出

$$a_1 \frac{X''}{X} + a_2 \frac{X'}{X} + a_3 = \lambda, \tag{6.1.9}$$

其中 λ 是常数,称为分离常数.由式(6.1.7)和(6.1.9),我们有

$$b_1 \frac{Y''}{Y} + b_2 \frac{Y'}{Y} + b_3 = -\lambda. \tag{6.1.10}$$

我们也可以把方程(6.1.9)和(6.1.10)改写为下列形式

$$a_1 X'' + a_2 X' + (a_3 - \lambda)X = 0 \tag{6.1.11}$$

和

$$b_1 Y'' + b_2 Y' + (b_3 + \lambda)Y = 0. \tag{6.1.12}$$

因此,如果 $X(x)$和 $Y(y)$分别是常微分方程(6.1.11)和(6.1.12)的解的话,那么 $u(x,y)$是方程(6.1.3)的解.

如果方程(6.1.1)的系数都是常数,那么就不再需要把方程(6.1.1)化为标准形式.为了说明这一点,让我们考察二阶方程

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0, \tag{6.1.13}$$

其中 A,B,C,D,E 和F 都是常数且A,B,C 不全为零.

像上面一样,假设解的形式为

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

把这个式子代入方程(6.1.13),得到

$$AX''Y + BX'Y' + CXY'' + DX'Y + EXY' + FXY = 0, \tag{6.1.14}$$

再把上述方程除以 AXY,可得

$$\frac{X''}{X} + \frac{B}{A}\frac{X'}{X}\frac{Y'}{Y} + \frac{C}{A}\frac{Y''}{Y} + \frac{D}{A}\frac{X'}{X} + \frac{E}{A}\frac{Y'}{Y} + \frac{F}{A} = 0, \quad A \neq 0. \tag{6.1.15}$$

把这个方程对 x 微分,得到

$$\left(\frac{X''}{X}\right)' + \frac{B}{A}\left(\frac{X'}{X}\right)'\frac{Y'}{Y} + \frac{D}{A}\left(\frac{X'}{X}\right)' = 0. \tag{6.1.16}$$

因而有

$$\frac{\left(\frac{X''}{X}\right)'}{\frac{B}{A}\left(\frac{X'}{X}\right)'}+\frac{D}{B}=-\frac{Y'}{Y}. \tag{6.1.17}$$

这个方程的变量已被分离了.这时两边都必须等于一个常数 λ.因此我们得到

$$Y'+\lambda Y=0, \tag{6.1.18}$$

$$\left(\frac{X''}{X}\right)'+\left(\frac{D}{B}-\lambda\right)\frac{B}{A}\left(\frac{X'}{X}\right)'=0. \tag{6.1.19}$$

把式(6.1.9)对 x 求积分,得到

$$\frac{X''}{X}+\left(\frac{D}{B}-\lambda\right)\frac{B}{A}\left(\frac{X'}{X}\right)=\beta, \tag{6.1.20}$$

其中 β 是待定常数.把式(6.1.18)代入式(6.1.15),可得

$$X''+\left(\frac{D}{B}-\lambda\right)\frac{B}{A}X'+\left(\lambda^2-\frac{E}{C}\lambda+\frac{F}{C}\right)\frac{C}{A}X=0. \tag{6.1.21}$$

比较式(6.1.20)和(6.1.21),显然有

$$\beta=-\left(\lambda^2-\frac{E}{C}\lambda+\frac{F}{C}\right)\frac{C}{A}.$$

因此,如果 $X(x)$和 $Y(y)$分别满足常微分方程(6.1.21)和(6.1.18)的话,那么 $u(x,y)$是方程(6.1.13)的解.

上面我们已对给定的偏微分方程的变量可分离的条件作了说明.现在我们还将仔细考虑有关的边界条件.在数学物理问题中,有好几种边界条件.但最经常出现的三种边界条件是:

(i)狄利克莱条件:　　$[u]_{x=x_0}=\alpha$;

(ii)诺依曼条件:　　$[u_x]_{x=x_0}=\beta$;

(iii)混杂条件:　　$[u_x+hu]_{x=x_0}=\gamma$.

这三种基本边界条件也分别称为第一、第二和第三边界条件.除这三种条件外,还有其他的一些边界条件,例如劳平条件:在一部分边界上给定一种边界条件,而在余下的边界上给定另一种边界条件.今后我们在讨论问题时,就将研究各种各样的边界条件.

在对上面所提到的边界条件作变量分离时,最好选择适合于边界的坐标系.例如,对边界为坐标线 $x=$ 常数和 $y=$ 常数的矩形域,我们采用直角坐标系(x,y);对边界为极坐标线 $r=$ 常数和 $\theta=$ 常数的圆形区域,我们采用极坐标系(r,θ).

要使边界条件中的变量可分离,还须有另外的条件.比如说在 $x=x_0$ 上

的边界条件中必须只含有 u 对 x 的导数，且边界条件中的所有系数也只依赖于 x. 例如，边界条件

$$[u + u_y]_{x=x_0} = 0$$

就不能被分离. 更用不着说，在坐标轴上不应给定 $u_x + u_y$ 这样的混杂条件.

6.2　弦振动问题

作为第一个例子，我们来考察两端固定于 x 轴上 $0, l$ 两点处的拉紧的弦振动问题. 这个问题可归结为求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \quad (6.2.1) \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \quad (6.2.2) \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \quad (6.2.3) \\ u(0,t) = 0, & \quad (6.2.4) \\ u(l,t) = 0, & \quad (6.2.5) \end{cases}$$

其中 f 和 g 分别是弦的初始位移和初始速度.

用分离变量法，我们假设解的形式为

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{6.2.6}$$

如果把式(6.2.6)代入方程(6.2.1)中，则得

$$XT'' = c^2 X''T,$$

因此，当 $XT \neq 0$ 时，有

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}. \tag{6.2.7}$$

因为等式(6.2.7)的左边不依赖于 t 而其右边不依赖于 x，所以必须有

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = -\lambda,$$

其中 λ 是常数. 于是有

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{6.2.8}$$

$$T + \lambda c^2 T = 0. \tag{6.2.9}$$

现在我们来分离边界条件. 由式(6.2.4)和(6.2.6)，得到

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0.$$

由于对所有的 t，$T(t) \neq 0$，因此

$$X(0) = 0. \tag{6.2.10}$$

同样，由边界条件(6.2.5)可得

$$X(l) = 0. \tag{6.2.11}$$

为了确定 $X(x)$,我们首先解本征值问题(各种本征值问题将在第七章中加以讨论):

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \tag{6.2.12}$$

我们要寻找能使上面问题的解为非平凡解[①]的那些 λ 的值. 分 $\lambda<0$, $\lambda=0$, $\lambda>0$ 三种可能情形加以讨论.

情形 1　$\lambda<0$.

在这种情形下,方程

$$X'' + \lambda X = 0$$

的通解的形式为

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

其中 A 和 B 都是任意常数. 为了满足边界条件,必有

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ Ae^{\sqrt{-\lambda}l} + Be^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0. \end{cases} \tag{6.2.13}$$

由于方程组(6.2.13)的系数行列式不等于零,因此 A 和 B 必须同时为零. 所以通解 $X(x)$ 恒等于零. 问题(6.2.12)的解是平凡解.

情形 2　$\lambda=0$.

这时方程的通解是

$$X(x) = A + Bx.$$

由边界条件得到

$$\begin{cases} A = 0, \\ A + Bl = 0. \end{cases}$$

因此 $A=B=0$. 于是问题(6.2.12)的解恒等于零.

情形 3　$\lambda>0$.

在这种情形下,方程的通解的形式为

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

由条件 $X(0)=0$,得 $A=0$. 由条件 $X(l)=0$,得

$$B\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

当 $B=0$ 时,问题(6.2.12)只有零解. 于是对问题的非零解,必须

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

---

① 齐次方程的不恒等于零的解称为非平凡解或称为非零解.

由此可得

$$\sqrt{\lambda}l = n\pi, \quad n = 1,2,3,\cdots,$$

或

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1,2,3,\cdots. \tag{6.2.14}$$

对于这组无穷多个离散的 λ 值,问题(6.2.12)有非零解.这些 λ_n 的值称为问题的本征值,同时称函数

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)x, \quad n - 1,2,3,\cdots$$

为对应于 λ_n 的本征函数.

注意,这里没有必要考虑 n 取负值时的情况,因为

$$\sin(-n)\frac{\pi x}{l} = -\sin\frac{n\pi x}{l},$$

也就没有得到新的解.

因此问题(6.2.12)的解是[①]

$$X_n(x) = B_n\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{6.2.15}$$

对于 $\lambda = \lambda_n$,方程(6.2.9)的通解可以写为

$$T_n(t) = C_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + D_n\sin\frac{n\pi c}{l}t, \tag{6.2.16}$$

其中 C_n 和 D_n 都是任意常数.

因此函数

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= \left(a_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

满足方程(6.2.1)和边界条件(6.2.4)及(6.2.5),其中 $a_n = B_nC_n$ 和 $b_n = B_nD_n$ 都是任意常数.

因为方程(6.2.1)是线性齐次的,利用叠加原理,如果无穷级数

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{6.2.17}$$

收敛且对 x 和 t 二次可微,那么它也是方程(6.2.1)的一个解.因为这个级数中的每一项都满足边界条件(6.2.4)和(6.2.5),所以级数也满足边界条件.还

---

① 注意,在问题(6.2.12)中有两个条件,而通解中有三个未知数 A,B 和 λ.因此 B 是任意的.

剩下两个初始条件需要满足,由这两个条件,我们能确定常数 a_n 和 b_n.

首先我们把级数(6.2.17)对 t 微分,有

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l}\left(-a_n \sin\frac{n\pi c}{l}t + b_n \cos\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \quad (6.2.18)$$

然后利用初始条件(6.2.2)和(6.2.3),可得

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{n\pi c}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都可展开为傅里叶正弦级数的话,那么上面两个等式才能成立.这时系数 a_n 和 b_n 为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \\ b_n = \dfrac{2}{n\pi c}\displaystyle\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x. \end{cases} \quad (6.2.19)$$

因此,弦振动问题的解由级数(6.2.17)给出,其中系数 a_n 和 b_n 由公式(6.2.19)所确定.

【例 6.2.1】 弦的拨动问题.

作为刚才讨论过的问题的特殊情形,考察一根拉紧的两端固定的弦.假定在 $x=a$ 处把这根弦拉开到高度 h,然后松开,则这根弦产生自由振动.这时初始条件可写成(如图 6.1 所示)

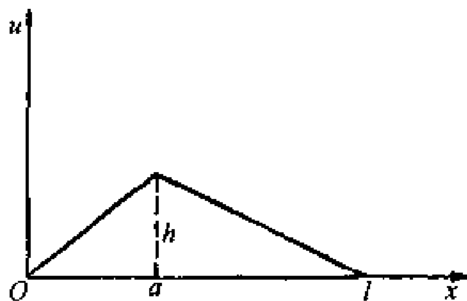


图 6.1

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} hx/a, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant a, \\ h(l-x)/(l-a), & \text{当 } a \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = g(x) = 0.$$

因为 $g(x)=0$,所以系数 b_n 都等于零.根据式(6.2.19),可以得出

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{l}\int_0^a \frac{hx}{a}\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x + \frac{2}{l}\int_a^l \frac{h(l-x)}{(l-a)}\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

通过积分和化简,可得

$$a_n = \frac{2hl^2}{\pi^2 a(l-a)} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi a}{l}.$$

因此受拨动的弦的位移是

$$u(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 a(l-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi c}{l} t.$$

【例 6.2.2】 弦的敲击问题.

这时我们要考察无初始位移的弦.设弦在 $x=a$ 处受敲击,而得初始速度为

$$u_t(x,0) = \begin{cases} \dfrac{v_0}{a} x, 0 \leqslant x \leqslant a, \\ \dfrac{v_0(l-x)}{(l-a)}, a \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

因为 $u(x,0)=0$,所以所有的 $a_n=0$.应用式(6.2.19),可求得

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^a \frac{v_0}{a} x \sin \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x + \frac{2}{n\pi c} \int_a^l v_0 \frac{(l-x)}{(l-a)} \sin \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x \\ &= \frac{2v_0 l^3}{\pi^3 ca(l-a)} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi a}{l}. \end{aligned}$$

因此,受敲击的弦的位移可写成

$$u(x,t) = \frac{2v_0 l^3}{\pi^3 ca(l-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi c}{l} t.$$

6.3 弦振动问题解的存在性和惟一性

在上一节中,我们已经知道初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \end{cases} \tag{6.3.1}$$

存在一个形式解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{6.3.2}$$

其中 a_n 和 b_n 是在区间[0,l]上的下面两个级数展开式的系数:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{6.3.3}$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{6.3.4}$$

我们现在将证明:在一定条件下,级数(6.3.2)确是定解问题(6.3.1)的解.

首先,我们看到

$$u_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi c}{l}t\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{6.3.5}$$

是定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=c^2u_{xx}, & 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=f(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ u_t(x,0)=0,\\ u(0,t)=0, & u(l,t)=0\end{cases} \tag{6.3.6}$$

的形式解,又

$$u_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi c}{l}t\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{6.3.7}$$

是定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=c^2u_{xx}, & 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=0,\\ u_t(x,0)=g(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=0, & u(l,t)=0\end{cases} \tag{6.3.8}$$

的形式解.由于定解问题(6.3.1)是线性的,因此形式解(6.3.2)可以看成是两个形式解(6.3.5)与(6.3.7)之和.

我们先假设 $f(x)$与 $f'(x)$在$[0,l]$上连续,并且 $f(0)=f(l)=0$.于是根据 5.12 节的定理 12.1,函数 $f(x)$的级数(6.3.3)在区间$[0,l]$上是绝对且一致收敛的.

利用三角恒等式

$$\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi c}{l}t=\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{l}(x-ct)+\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{l}(x+ct), \tag{6.3.9}$$

$u_1(x,t)$可以写成

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi}{l}(x-ct)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi}{l}(x+ct).$$

定义

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{6.3.10}$$

且假设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的奇周期延拓，即对所有的 x，有

$$F(x) = f(x),\quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$
$$F(-x) = -F(x),$$
$$F(x+2l) = F(x).$$

现在我们可以把 $u_1(x,t)$ 改写成下列形式：

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}[F(x-ct) + F(x+ct)]. \tag{6.3.11}$$

注意，

$$\begin{aligned} u_1(0,t) &= \frac{1}{2}[F(-ct) + F(ct)] \\ &= \frac{1}{2}[-F(ct) + F(ct)] = 0, \\ u_1(l,t) &= \frac{1}{2}[F(l-ct) + F(l+ct)] \\ &= \frac{1}{2}[F(-l-ct) + F(l+ct)] \\ &= \frac{1}{2}[-F(l+ct) + F(l+ct)] = 0, \end{aligned}$$

因此 $u_1(x,t)$ 满足边界条件. 因为

$$\begin{aligned} u_1(x,0) &= \frac{1}{2}[F(x) + F(x)] \\ &= F(x) = f(x),\quad 0 \leqslant x \leqslant l, \end{aligned}$$

所以第一个初始条件满足，于是定解问题(6.3.6)中的三个条件已被满足. 又因为 f' 在 $[0,l]$ 上是连续的，所以 F' 对所有的 x 存在且连续. 如果把 u_1 对 t 微分，可得

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{2}[-cF'(x-ct) + cF'(x+ct)]$$

和

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = \frac{1}{2}[-cF'(x) + cF'(x)] = 0.$$

因此，第四个条件也被满足.

为了证明 $u_1(x,t)$ 满足定解问题(6.3.6)中的微分方程，我们要对 f 再加一些限制. 设 f'' 在 $[0,l]$ 上连续，并且 $f''(0) = f''(l) = 0$，那么 F'' 处处存在并连续. 因此

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{1}{2}c^2[F''(x-ct)+F''(x+ct)],$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{1}{2}[F''(x-ct)+F''(x+ct)].$$

从而证得

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}.$$

然后,为了证明 $u_2(x,t)$是定解问题(6.3.8)的解,我们还将对 g 作一些假设. 设 $g(x)$和 $g'(x)$在$[0,l]$上连续,并且 $g(0)=g(l)=0$. 于是 $g(x)$的级数(6.3.4)在区间$[0,l]$上是绝对且一致收敛的. 引入新系数 $c_n = \left(\frac{n\pi c}{l}\right)b_n$,我们有

$$u_2(x,t) = \frac{l}{\pi c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n}\sin\frac{n\pi c}{l}t\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{6.3.12}$$

我们将看到上式对 t 逐项微分是允许的,因此

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\frac{n\pi c}{l}t\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{6.3.13}$$

利用三角恒等式(6.3.9),可得

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi}{l}(x-ct) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi}{l}(x+ct). \tag{6.3.14}$$

由于对 g 所作的假设,因此上式中的两个级数都是绝对且一致收敛的. 于是级数(6.3.12)和(6.3.13)在区间$[0,l]$上都是绝对且一致收敛的. 所以证明了逐项微分是可以做的.

设函数

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

是函数 $g(x)$的奇周期延拓,那么式(6.3.14)可以写成下列形式:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{2}[G(x-ct)+G(x+ct)].$$

把上式积分,可以得到

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t G(x-ct_1)\mathrm{d}t_1 + \frac{1}{2}\int_0^t G(x+ct_1)\mathrm{d}t_1 = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}G(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{6.3.15}$$

于是立即推得

$$u_2(x,0)=0$$

和

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0)=G(x)=g(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l.$$

此外,有

$$\begin{aligned}u_2(0,t)&=\frac{1}{2}\int_0^t G(-ct_1)\mathrm{d}t_1+\frac{1}{2}\int_0^t G(ct_1)\mathrm{d}t_1\\&=-\frac{1}{2}\int_0^t G(ct_1)\mathrm{d}t_1+\frac{1}{2}\int_0^t G(ct_1)\mathrm{d}t_1\\&=0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}u_2(l,t)&=\frac{1}{2}\int_0^t G(l-ct_1)\mathrm{d}t_1+\frac{1}{2}\int_0^t G(l+ct_1)\mathrm{d}t_1\\&=\frac{1}{2}\int_0^t G(-l-ct_1)\mathrm{d}t_1+\frac{1}{2}\int_0^t G(l+ct_1)\mathrm{d}t_1\\&=-\frac{1}{2}\int_0^t G(l+ct_1)\mathrm{d}t_1+\frac{1}{2}\int_0^t G(l+ct_1)\mathrm{d}t_1\\&=0.\end{aligned}$$

最后,$u_2(x,t)$必须满足定解问题(6.3.8)中的微分方程.因为 g' 在$[0,l]$上连续,所以 G'存在,且

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=\frac{c}{2}[-G'(x-ct)+G'(x+ct)].$$

由式(6.3.12),把 $u_2(x,t)$对 x 微分,得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial x}&=\frac{1}{c}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi c}{l}t\cos\frac{n\pi x}{l}\\&=\frac{1}{2c}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left[-\sin\frac{n\pi}{l}(x-ct)+\sin\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right]\\&=\frac{1}{2c}[-G(x-ct)+G(x+ct)].\end{aligned}$$

再对 x 微分,可得

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\frac{1}{2c}[-G'(x-ct)+G'(x+ct)].$$

显然下式成立:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}.$$

于是初边值问题(6.3.1)的解的存在性得到证明.

定理 6.3.1 (惟一性定理) 波动方程

$$u_{tt}=c^2u_{xx},\quad 0<x<l,\ t>0$$

至多有一个解能满足初始条件

$$\begin{cases}u(x,0)=f(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ u_t(x,0)=g(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\end{cases}$$

和边界条件

$$\begin{cases}u(0,t)=0,\\ u(l,t)=0,\end{cases}$$

其中 $u(x,t)$是对 x 和 t 二次连续可微的函数.

证明 假定问题有两个解 u_1 和 u_2,令 $v=u_1-u_2$.

易知 $v(x,t)$是下列定解问题的解:

$$\begin{cases}v_{tt}=c^2v_{xx}, & 0<x<l,t>0,\\ v(0,t)=0, & v(l,t)=0,\\ v(x,0)=0, & 0\leqslant x\leqslant l,\\ v_t(x,0)=0, & 0\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

我们现在来证明函数 $v(x,t)$恒等于零.为此,考察函数

$$I(t)=\frac{1}{2}\int_0^l(c^2v_x^2+v_t^2)\mathrm{d}x, \tag{6.3.16}$$

它在物理上表示振动的弦在时刻 t 的总能量.

因为函数 $v(x,t)$是二次连续可微的,所以把 $I(t)$对 t 微分,可得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\int_0^l(c^2v_xv_{xt}+v_tv_{tt})\mathrm{d}x. \tag{6.3.17}$$

作分部积分,得到

$$\int_0^l c^2v_xv_{xt}\mathrm{d}x=[c^2v_xv_t]_0^l-\int_0^l c^2v_tv_{xx}\mathrm{d}x.$$

但由条件 $v(0,t)=0$,我们有 $v_t(0,t)=0$. 同样,由条件 $v(l,t)=0$,可得 $v_t(l,t)=0$.因此,上面方括号中的式子等于零,且式(6.3.17)变为

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\int_0^l v_t(v_{tt}-c^2v_{xx})\mathrm{d}x. \tag{6.3.18}$$

因为 $v_{tt}-c^2v_{xx}=0$,所以式(6.3.18)简化为

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=0,$$

这就表示 $I(t)=C$ (C 是常数).

因为 $v(x,0)=0$,所以有 $v_x(x,0)=0$. 注意到条件 $v_t(x,0)=0$,可算出 C 得

$$I(0) = C = \frac{1}{2}\int_0^l [c^2 v_x^2 + v_t^2]_{t=0} \mathrm{d}x = 0.$$

这就是说,$I(t)=0$. 因此,当 $t>0$ 时,必有 $v_x\equiv 0$ 和 $v_t\equiv 0$. 为了满足这两个要求,必有 $v(x,t)=$常数. 利用条件 $v(x,0)=0$,则得 $v(x,t)\equiv 0$. 所以 $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$,即解 $u(x,t)$是惟一的. 本定理证毕.

6.4　热传导问题

考察一长度为 l 的均匀杆,它是足够细的. 因此在任何时刻 t,同一截面上的温度分布是相同的. 设杆的表面是绝热的,因而在边界上没有热量散失. 如果杆的两端温度保持零度,其初始温度分布为 $f(x)$,那么这根细杆的温度分布函数就是下列初边值问题的解:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < l,\ t > 0, & (6.4.1)\\ u(0,t) = 0, & (6.4.2)\\ u(l,t) = 0, & (6.4.3)\\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. & (6.4.4)\end{cases}$$

我们用分离变量法来解这个问题.

如果假设解的形式为

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

那么由方程(6.4.1)可得

$$XT' = kX''T.$$

像前面一样,我们有

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\alpha^2,$$

其中 α 是正的常数. 因此,我们可把上式写成

$$X'' + \alpha^2 X = 0$$

和

$$T' + \alpha^2 kT = 0.$$

由边界条件

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$$

和

$$u(l,t) = X(l)T(t) = 0,$$

因为 $T(t)\neq 0$,所以对任意时刻 t,可得

$$X(0)=0$$

和

$$X(l)=0.$$

因此,我们必须解本征值问题

$$\begin{cases} X''+\alpha^2X=0, \\ X(0)=0, \quad X(l)=0. \end{cases}$$

这个问题的微分方程的通解是

$$X(x)=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x.$$

因为 $X(0)=0$,所以 $A=0$. 为了满足第二个端点条件,有

$$X(l)=B\sin\alpha l=0.$$

假如 $B=0$,将得出平凡解,所以必定有

$$\sin\alpha l=0,$$

即

$$\alpha=\frac{n\pi}{l}, \quad n=1,2,3,\cdots.$$

当 α 取这些数值时,我们得到的解为

$$X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

再来考察方程

$$T'+\alpha^2kT=0,$$

它的解是

$$T(t)=Ce^{-\alpha^2kt}$$

或

$$T_n(t)=C_ne^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2kt}.$$

因此,满足两个边界条件的热传导方程的非零解是

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=a_ne^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2kt}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中 $a_n=B_nC_n$ 是任意常数.

为了能求出定解问题(6.4.1)~(6.4.4)的解,我们形式地组成一个级数

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2kt}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

要使它满足初始条件,必须

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

而要使上式成立，只要 $f(x)$ 能展开成以下列 a_n 为系数的傅里叶正弦级数：

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x.$$

因此

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l f(\tau)\sin\frac{n\pi\tau}{l}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{6.4.5}$$

是热传导问题的形式解.

【例 6.4.1】 (a)假定初始温度分布 $f(x)=x(l-x)$，那么由式(6.4.5)可得

$$a_n = \frac{8l^2}{n^3\pi^3},\quad n = 1,3,5,\cdots.$$

于是这个问题的解是

$$u(x,t) = \frac{8l^2}{\pi^3}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

(b)假定杆的一端保持常温，即

$$u(l,t) = u_0, t \geqslant 0.$$

这时定解问题是

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & u(l,t) = u_0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < l. \end{cases} \tag{6.4.6}$$

用叠加原理，设

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{u_0 x}{l}.$$

把 $u(x,t)$ 代入定解问题(6.4.6)，可得

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ v(0,t) = 0, & v(l,t) = 0, \\ v(x,0) = f(x) - \dfrac{u_0 x}{l}, & 0 < x < l. \end{cases}$$

因此，利用定解问题(6.4.1)~(6.4.4)的解的公式(6.4.5)，我们得到

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l\left(f(\tau) - \frac{u_0\tau}{l}\right)\sin\frac{n\pi\tau}{l}\mathrm{d}\tau\right] \cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt}\sin\frac{n\pi x}{l} + \frac{u_0 x}{l}.$$

6.5 热传导问题解的存在性和惟一性

在上一节中,我们知道

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2kt}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{6.5.1}$$

是热传导问题

$$\begin{cases}u_t=ku_{xx}, & 0<x<l,\ t>0,\\ u(0,t)=0, & u(l,t)=0,\\ u(x,0)=f(x), & 0\leqslant x\leqslant l\end{cases} \tag{6.5.2}$$

的形式解,其中系数 a_n 由下列级数展开式所确定:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{6.5.3}$$

我们将证明:如果 $f(x)$在$[0,l]$上连续,$f(0)=f(l)=0$,且 $f'(x)$在$(0,l)$内分段连续,那么形式解(6.5.1)就是定解问题(6.5.2)的解.

因为 $f(x)$是有界的,我们有

$$|a_n|=\frac{2}{l}\left|\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\frac{2}{l}\int_0^l|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant C,$$

其中 C 是正的常数.于是对任意给定的 $t_0>0$,有

$$\left|a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2kt}\sin\frac{n\pi x}{l}\right|\leqslant Ce^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2kt_0},\text{当 } t\geqslant t_0 \text{ 时}.$$

根据比值判别法,通项为 $C\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2kt_0\right]$的常数项级数是收敛的.因此,由维尔斯特拉斯的优级数判别法,级数(6.5.1)当 $t\geqslant t_0$ 和 $0\leqslant x\leqslant l$ 时是一致收敛的.

把式(6.5.1)对 t 逐项微分,得到

$$u_t=-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2ke^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2kt}\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{6.5.4}$$

当 $t\geqslant t_0$ 时,注意到

$$\left|-a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2ke^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2kt}\sin\frac{n\pi x}{l}\right|$$
$$\leqslant C\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2ke^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2kt_0},$$

而由比值判别法可知通项为 $C\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 k\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt_0\right]$的常数项级数收敛.因而级数(6.5.4)在区域 $0\leqslant x\leqslant l, t\geqslant t_0$ 上是一致收敛的.同样,可把级数(6.5.1)对 x 逐项微分两次,得到

$$u_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt}\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{6.5.5}$$

显然,由式(6.5.4)和(6.5.5)可得

$$u_t = ku_{xx}.$$

因此级数(6.5.1)在区域 $0\leqslant x\leqslant l, t>0$ 内是一维热传导方程的一个解.

然后,我们证明 $u(x,t)$ 满足边界条件.这里我们注意到表示函数 $u(x,t)$的级数(6.5.1)在区域 $0\leqslant x\leqslant l, t>0$ 上是一致收敛的.因为通项为连续函数的一致收敛级数所表示的函数是连续的,所以 $u(x,t)$在 $x=0$ 与 $x=l$ 处连续.于是对所有的 $t>0$,当 $x=0$ 和 $x=l$ 时,由式(6.5.1)可得

$$u(0,t)=0,$$
$$u(l,t)=0.$$

剩下的问题是要证明 $u(x,t)$满足初始条件

$$u(x,0)=f(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l.$$

在前面的假设下,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

是绝对且一致收敛的.根据阿贝尔判别法,由于级数(6.5.1)的通项是一致收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

的通项和一致有界的单调序列 $\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt\right]$的元素的乘积,所以它对 t 是一致收敛的.因此,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

在区域 $0\leqslant x\leqslant l, t\geqslant 0$ 上一致收敛,与前面理由相同,$u(x,t)$在区域 $0\leqslant x\leqslant l, t\geqslant 0$ 上连续.于是,初始条件

$$u(x,0)=f(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l$$

被满足.因此解的存在性得到证明.

在上面讨论中,对 $f(x)$所加的条件比必须要加的条件强.对 $f(x)$适当放宽条件也能得到定解问题的解.

定理 6.5.1 (惟一性定理) 设 $u(x,t)$是可微函数,如果 $u(x,t)$满足微分方程

$$u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

并且满足初始条件

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

及边界条件

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, & t \geqslant 0, \\ u(l,t) = 0, & t \geqslant 0, \end{cases}$$

那么它是惟一的.

证明 假定有两个函数 $u_1(x,t)$和 $u_2(x,t)$满足上述定解问题.令

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t),$$

那么函数 $v(x,t)$满足的定解问题为

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, & t \geqslant 0, \\ v(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{6.5.6}$$

此外,$v(x,t)$具有与 $u_1(x,t)$和 $u_2(x,t)$相同的连续性和可微性.

考察函数

$$J(t) = \frac{1}{2k}\int_0^l v^2 \mathrm{d}x.$$

把它对 t 微分,并由定解问题(6.5.6)中的方程,可得

$$J'(t) = \frac{1}{k}\int_0^l vv_t \mathrm{d}x = \int_0^l vv_{xx}\mathrm{d}x.$$

作分部积分,得到

$$\int_0^l vv_{xx}\mathrm{d}x = [vv_x]_0^l - \int_0^l v_x^2 \mathrm{d}x.$$

因为

$$v(0,t) = v(l,t) = 0,$$

所以

$$J'(t) = -\int_0^l v_x^2 \mathrm{d}x \leqslant 0.$$

于是 $J(t)$是 t 的非增函数.由条件 $v(x,0)=0$,我们有 $J(0)=0$.因而

$$J(t) \leqslant 0.$$

但是根据 $J(t)$的定义,必有

$$J(t) \geqslant 0.$$

因此

$$J(t) \equiv 0, \quad t \geqslant 0.$$

因为 $v(x,t)$是连续的，由 $J(t) \equiv 0$ 可得

$$v(x,t) \equiv 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad t \geqslant 0.$$

因此 $u_1 \equiv u_2$，即解是惟一的.

6.6 拉普拉斯方程和梁的方程

【例 6.6.1】 拉普拉斯方程.考察一矩形薄板的稳恒状态的温度分布.设板的两边是绝热的，一边温度保持零度，而其余一边的温度由 $f(x)$表示.于是我们需要求解下列定解问题：

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u(x,0) = f(x), & u(x,b) = 0, \\ u_x(0,y) = 0, & u_x(a,y) = 0. \end{cases}$$

设 $u(x,y) = X(x)Y(y)$.把它代入拉普拉斯方程，可得

$$X'' - \lambda X = 0,$$

$$Y'' + \lambda Y = 0.$$

因为在 $x=0$ 和 $x=a$ 处，边界条件都是齐次的，为了能够求得非零解，应有 $\lambda = -\alpha^2$，其中 $\alpha \geqslant 0$.因此可得下列本征值问题：

$$\begin{cases} X'' + \alpha^2 X = 0, \\ X'(0) = 0, \quad X'(a) = 0. \end{cases}$$

上面方程的解为

$$X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x.$$

利用边界条件可得 $B=0$ 和

$$\alpha = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

因此

$$X_n(x) = A_n \cos\frac{n\pi x}{a}, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

显然，Y 的方程的解是

$$Y(y) = C\cosh\alpha y + D\sinh\alpha y.$$

可把 $Y(y)$写成下列形式：

$$Y(y) = E\sinh\alpha(y + F),$$

其中 $E = (D^2 - C^2)^{1/2}$，$F = [\tanh^{-1}(C/D)]/\alpha$.

利用齐次边界条件 $Y(b)=0$,得到

$$Y(b) = E\sinh\alpha(b+F) = 0,$$

对于非零解可得

$$F = -b, \quad E \neq 0.$$

因此,我们有

$$u(x,y) = \frac{(b-y)}{b}\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi}{a}(y-b).$$

现在利用剩下的非齐次边界条件,得到

$$u(x,0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{a}\sinh\left(-\frac{n\pi b}{a}\right).$$

因为这个级数是傅里叶余弦级数,所以系数为

$$a_0 = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{-2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x, \quad n = 1,2,3,\cdots.$$

于是定解问题的形式解是

$$u(x,y) = \left(\frac{b-y}{b}\right)\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \frac{\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\cos\frac{n\pi x}{a},$$

其中

$$a_n^* = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x, \quad n = 1,2,3,\cdots.$$

作为例子,如果设 $a=b=\pi$ 和 $f(x)=x(0<x<\pi)$,那么可求得

$$a_0 = \pi,$$

$$a_n^* = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1], \quad n = 1,2,3,\cdots,$$

因此

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(\pi - y) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2} \cdot [(-1)^n - 1]\frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi}\cos nx.$$

【例 6.6.2】 梁的横振动.作为另一个例子,我们考察梁的横振动.梁的振动方程可归结为

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

其中 $u(x,t)$是位移,a 是物理常数.注意,这个方程对 x 是四阶的.设初始条件和边界条件是

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(l,t) = 0. \end{cases} \tag{6.6.1}$$

这些边界条件表示梁是简支的,即其两端的位移和弯矩都是零.

假设解的形式为

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

代入振动方程可得

$$T'' + a^2\alpha^4 T = 0, \quad \alpha > 0,$$
$$X'''' - \alpha^4 X = 0.$$

$X(x)$的方程有通解

$$X(x) = A\cosh\alpha x + B\sinh\alpha x + C\cos\alpha x + D\sin\alpha x.$$

由边界条件可以得到

$$X(0) = X(l) = 0,$$
$$X''(0) = X''(l) = 0.$$

把 X 对 x 微分两次,得到

$$X''(x) = A\alpha^2\cosh\alpha x + B\alpha^2\sinh\alpha x - C\alpha^2\cos\alpha x - D\alpha^2\sin\alpha x.$$

利用条件 $X(0)=X''(0)=0$,可得

$$A + C = 0,$$
$$\alpha^2(A - C) = 0,$$

因而

$$A = C = 0.$$

由条件 $X(l)=X''(l)=0$,可得

$$B\sinh\alpha l + D\sin\alpha l = 0,$$
$$B\sinh\alpha l - D\sin\alpha l = 0.$$

如果

$$B\sinh\alpha l = 0, D\sin\alpha l = 0,$$

上面两个式子就能成立.因为 $\sinh\alpha l \neq 0$,所以 B 必为零.对于非零解,必须

$$\sin\alpha l = 0, \quad D \neq 0,$$

因而

$$\alpha = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1,2,3,\cdots.$$

于是我们得到

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

方程

$$T'' + a^2\alpha^4 T = 0$$

的通解是

$$T(t) = E\cos a\alpha^2 t + F\sin a\alpha^2 t.$$

把上面的 α^2 的值代入,得到

$$T_n(t) = E_n \cos a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t + F_n \sin a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t.$$

于是梁的横振动方程的解是

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t + b_n \sin a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right]\sin\frac{n\pi x}{l}. \quad (6.6.2)$$

为了满足初始条件 $u(x,0)=f(x)$,必须

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

因此

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x. \quad (6.6.3)$$

再利用第二个初始条件,得

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{l},$$

因而

$$b_n = \frac{2}{al}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x. \quad (6.6.4)$$

于是,梁的初边值问题的解由公式(6.6.2)~(6.6.4)给出.

6.7 非齐次问题

至目前为止,本章讨论的方程和边界条件都是齐次的.实际上还有方程与边界条件二者中至少有一个是非齐次的情况,这类问题称为非齐次问题.我们将首先讨论非齐次方程的右端函数与时间无关的非齐次问题,进而再介绍一般的非齐次问题的解法.

先考虑如下初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x), \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = A, \quad u(l,t) = B, \quad t > 0. \end{cases} \tag{6.7.1}$$

我们假设解的形式为

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x).$$

把 $u(x,t)$代入问题(6.7.1)中的方程,得到

$$v_{tt} = c^2[v_{xx} + U''(x)] + F(x).$$

如果 $U(x)$满足方程

$$c^2 U''(x) + F(x) = 0,$$

那么有

$$v_{tt} = c^2 v_{xx}.$$

同样,如果把 $u(x,t)$代入初始条件和边界条件,得到

$$u(x,0) = v(x,0) + U(x) = f(x),$$
$$u_t(x,0) = v_t(x,0) = g(x),$$
$$u(0,t) = v(0,t) + U(0) = A,$$
$$u(l,t) = v(l,t) + U(l) = B.$$

于是,如果 $U(x)$是下列问题的解:

$$\begin{cases} c^2 U''(x) + F(x) = 0, \\ U(0) = A, \quad U(l) = B, \end{cases}$$

那么 $v(x,t)$必须满足

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx}, \\ v(x,0) = f(x) - U(x), \\ v_t(x,0) = g(x), \\ v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0. \end{cases} \tag{6.7.2}$$

当 $U(x)$为已知时,容易解出 $v(x,t)$. 我们能够看出

$$U(x) = A + (B - A)\frac{x}{l} + \frac{x}{l}\int_0^l \left[\frac{1}{c^2}\int_0^\eta F(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\eta$$
$$- \int_0^x \left[\frac{1}{c^2}\int_0^\eta F(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\eta.$$

作为一个特例,考察下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + h \quad (h\ \text{是常数}) \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{6.7.3}$$

于是,问题

$$\begin{cases} c^2U''(x)+h=0, \\ U(0)=0, \quad U(l)=0 \end{cases}$$

的解是

$$U(x)=\frac{h}{2c^2}(lx-x^2).$$

所以 $v(x,t)$必须满足

$$\begin{cases} v_{tt}=c^2v_{xx} \\ v(x,0)=-\frac{h}{2c^2}(lx-x^2), \\ v_t(x,0)=0, \\ v(0,t)=0, \quad v(l,t)=0. \end{cases}$$

这个定解问题的解是[6.2 节中 $g(x)=0$]

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi c}{l}t\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

确定系数,得到

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l-\frac{h}{2c^2}(lx-x^2)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} -\dfrac{4l^2h}{n^3\pi^3c^2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数}, \\ 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数}. \end{cases} \end{aligned}$$

因此,已给的初边值问题(6.7.3)的解是

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(x,t)+U(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-4l^2h}{c^2\pi^3}\right)\frac{1}{(2n-1)^3}\cos(2n-1)\frac{\pi c}{l}t \\ &\quad \cdot\sin(2n-1)\frac{\pi x}{l}+\frac{hx}{2c^2}(l-x). \end{aligned} \tag{6.7.4}$$

现在考虑一般的非齐次问题.设有如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & 0<x<l,t>0, & (6.7.5) \\ u(x,0)=\phi(x), & 0\leqslant x\leqslant l, & (6.7.6) \\ u_t(x,0)=\psi(x), & 0\leqslant x\leqslant l, & (6.7.7) \\ u(0,t)=\mu_1(t), & t\geqslant 0, & (6.7.8) \\ u(l,t)=\mu_2(t), & t\geqslant 0. & (6.7.9) \end{cases}$$

为求解这一非齐次问题,我们首先把非齐次的边界条件处理成齐次的情况,为

此作如下的未知函数的代换：

$$u(x,t)=U(x,t)+g(x,t), \tag{6.7.10}$$

这里 $U(x,t)$是新的未知函数，而 $g(x,t)$是待定的函数，它的选取要使得关于 $U(x,t)$的定解问题中的边界条件化为齐次的，即使得 $U(0,t)=U(l,t)=0$. 为此，只需 $g(x,t)$满足

$$g(o,t)=\mu_1(t), g(l,t)=\mu_2(t). \tag{6.7.11}$$

而满足式(6.7.11)的函数有很多，例如可取 $g(x,t)$为关于 x 的线性函数：

$$g(x,t)=p(t)x+q(t),$$

则由式(6.7.11)得出

$$p(t)=\frac{1}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)], q(t)=\mu_1(t).$$

即选取

$$g(x,t)=\mu_1(t)+\frac{1}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)]x,$$

由代换(6.7.10)得

$$u(x,t)=U(x,t)+\mu_1(t)+\frac{1}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)]x. \tag{6.7.12}$$

而 $U(x,t)$满足如下齐次边界条件的定解问题(Ⅰ)：

$$(\mathrm{I})\begin{cases}U_{tt}=a^2U_{xx}+\tilde{f}(x,t), & 0<x<l, t>0,\\ U(x,0)=\tilde{\phi}(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ U_t(x,0)=\tilde{\psi}(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ U(0,t)=0, & t\geqslant 0,\\ U(l,t)=0. & t\geqslant 0,\end{cases}$$

其中

$$\tilde{f}(x,t)=f(x,t)-\mu_1''(t)-\frac{1}{l}[\mu_2''(t)-\mu_1''(t)]x,$$

$$\tilde{\phi}(x)=\phi(x)-\mu_1(0)-\frac{1}{l}[\mu_2(0)-\mu_1(0)]x,$$

$$\tilde{\psi}(x)=\psi(x)-\mu_1'(0)-\frac{1}{l}[\mu_2'(0)-\mu_1'(0)]x.$$

在定解问题(Ⅰ)中，弦的振动可看成是由两部分干扰引起的，即强迫力和初始状态. 据此，可应用叠加原理，设问题(Ⅰ)的解 $U(x,t)$为

$$U(x,t)=W(x,t)+Z(x,t), \tag{6.7.13}$$

其中 $W(x,t)$表示仅由强迫力引起的弦振动，该振动满足定解问题(Ⅱ)：

$$
(\text{II})\begin{cases}
W_{tt}=a^2W_{xx}+\widetilde{f}(x,t), & 0<x<l,t>0,\\
W(x,0)=0, & 0\leqslant x\leqslant l,\\
W_t(x,0)=0, & 0\leqslant x\leqslant l,\\
W(0,t)=0, & t\geqslant 0,\\
W(l,t)=0, & t\geqslant 0.
\end{cases}
$$

而 $Z(x,t)$ 表示仅由初始状态引起的弦振动,该振动满足定解问题(Ⅲ):

$$
(\text{III})\begin{cases}
Z_{tt}=a^2Z_{xx}, & 0<x<l,t>0,\\
Z(x,0)=\widetilde{\varphi}(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\
Z_t(x,0)=\widetilde{\psi}(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\
Z(0,t)=0, & t\geqslant 0,\\
Z(l,t)=0, & t\geqslant 0.
\end{cases}
$$

定解问题(Ⅲ)可直接按 6.2 节介绍的分离变量法求出其解

$$
Z(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{an\pi}{l}t+b_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,
$$

其中

$$
\begin{cases}
a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\widetilde{\varphi}(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,\\
b_n=\dfrac{2}{an\pi}\displaystyle\int_0^l\widetilde{\psi}(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi, \quad n=1,2,\cdots.
\end{cases}
$$

下面说明定解问题(Ⅱ)的求解方法. 由分离变量法所求的解的表达式和线性非齐次常微分方程中常用的常数变易法可受到启发,设定解问题(Ⅱ)的解具有如下形式:

$$
W(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}W_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{6.7.14}
$$

其中 $\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 和 $\sin\frac{n\pi}{l}x$ 分别是定解问题(Ⅲ)的本征值和本征函数, $W_n(t)$ 是待定函数. 为了确定 $W_n(t)$,把自由项 $\widetilde{f}(x,t)$ 也按本征函数在 $(0,l)$ 内展开成以下级数:

$$
\widetilde{f}(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{6.7.15}
$$

其中

$$
f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\widetilde{f}(\xi,t)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi, \quad n=1,2,\cdots.
$$

把式(6.7.14)和(6.7.15)代入定解问题(Ⅱ)的方程中,得到

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[W_n''(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2W_n(t)-f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi}{l}x=0,$$

由此知 $W_n(t)$应满足方程

$$W_n''(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2W_n(t)=f_n(t),\quad n=1,2,\cdots,$$

再把式(6.7.14)代入定解问题(Ⅱ)的初始条件可得 $W_n(0)=0, W_n'(0)=0$. 这样就得到了求解 $W_n(t)$的定解问题：

$$(\text{Ⅳ})\begin{cases}W_n''(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2W_n(t)=f_n(t),\\ W_n(0)=0,\\ W_n'(0)=0, \qquad\qquad n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

这是一个二阶常系数线性非齐次常微分方程的初始值问题. 我们可用常数变易法来求解定解问题(Ⅳ). 易知定解问题(Ⅳ)中的方程对应的齐次方程

$$\widetilde{W}_n''(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2\widetilde{W}_n(t)=0$$

的通解为

$$\widetilde{W}_n(t)=\widetilde{c}_n\cos\frac{an\pi}{l}t+\widetilde{d}_n\sin\frac{an\pi}{l}t,$$

故可设定解问题(Ⅳ)的解为

$$W_n(t)=c_n(t)\cos\frac{an\pi}{l}t+d_n(t)\sin\frac{an\pi}{l}t, n=1,2,\cdots \quad (6.7.16)$$

其中 $c_n(t)$与 $d_n(t)$为待定函数. 把式(6.7.16)代入定解问题(Ⅳ)的方程中，经整理后，得

$$\left[c_n'(t)\cos\frac{an\pi}{l}t+d_n'(t)\sin\frac{an\pi}{l}t\right]$$

$$+\frac{an\pi}{l}\left[-c_n'(t)\sin\frac{an\pi}{l}t+d_n'(t)\cos\frac{an\pi}{l}t\right]=f_n(t),\quad n=1,2,\cdots,$$

所以只要取 $c_n'(t)$和 $d_n'(t)$同时满足如下问题：

$$(\text{Ⅴ})\begin{cases}c_n'(t)\cos\frac{an\pi}{l}t+d_n'(t)\sin\frac{an\pi}{l}t=0,\\ -c_n'(t)\sin\frac{an\pi}{l}t+d_n'(t)\cos\frac{an\pi}{l}t=\frac{l}{an\pi}f_n(t),\quad n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

就可以使式(6.7.16)满足定解问题(Ⅳ)中的方程. 由定解问题(Ⅴ)不难解出

$$c_n'(t)=\frac{-l}{an\pi}f_n(t)\sin\frac{an\pi}{l}t,$$

$$d_n'(t)=\frac{l}{an\pi}f_n(t)\cos\frac{an\pi}{l}t.$$

把 $c_n'(t)$和 $d_n'(t)$从 0 到 t 积分,易得

$$c_n(t)=c_n(0)-\frac{l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}\tau\mathrm{d}\tau,$$

$$d_n(t)=d_n(0)+\frac{l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\cos\frac{an\pi}{l}\tau\mathrm{d}\tau.$$

其中 $c_n(0)$和 $d_n(0)$是待定常数,$n=1,2,\cdots$.代入式(6.7.16)整理后,得

$$\begin{aligned}W_n(t)&=c_n(0)\cos\frac{an\pi}{l}t+d_n(0)\sin\frac{an\pi}{l}t\\&\quad+\frac{l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau,n=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

由定解问题(Ⅳ)的初始条件得

$$c_n(0)=W_n(0)=0,d_n(0)=W_n'(0)=0,n=1,2,\cdots.$$

因此有

$$W_n(t)=\frac{l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau,n=1,2,\cdots.\quad(6.7.17)$$

从而得定解问题(Ⅱ)的解:

$$W(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

最后再由式(6.7.12)和(6.7.13)得到原定解问题(6.7.5)~(6.7.9)的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mu_1(t)+\frac{1}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)]x\\&\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{an\pi}{l}t+b_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\\&\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x.\end{aligned}$$

以上介绍的求解定解问题(Ⅱ)的方法,其思路是把这个解和自由项都在$(0,l)$内展开为定解问题(Ⅲ)的本征函数的级数,所以又称这个方法为本征函数法.一般而言,定解问题的边界条件的类型不同,其本征函数族也不同.事实上,若事先知道定解问题的本征函数族,可直接对定解问题应用待定函数法求解.如已知定解问题(Ⅰ)的本征函数族为$\left\{\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}_{n=1}^{\infty}$,则可令

$$(\text{Ⅵ})\begin{cases} U(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(t)\sin\dfrac{n\pi}{l}x,\\ \widetilde{f}(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\dfrac{n\pi}{l}x,\\ \widetilde{\phi}(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\phi_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x,\\ \widetilde{\psi}(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x,\end{cases}$$

其中 $f_n(t),\phi_n,\psi_n$ 是正弦级数的系数:

$$\begin{cases} f_n(t)=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\widetilde{f}(\xi,t)\sin\dfrac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,\\ \phi_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\widetilde{\phi}(\xi)\sin\dfrac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,\\ \psi_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\widetilde{\psi}(\xi)\sin\dfrac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

把式(Ⅵ)代入定解问题(Ⅰ),得到 $U_n(t)$应满足定解问题(Ⅶ):

$$(\text{Ⅶ})\begin{cases} U_n''(t)+\left(\dfrac{an\pi}{l}\right)^2U_n(t)=f_n(t),\\ U_n(0)=\phi_n,\\ U_n'(0)=\psi_n,\quad n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

这是二阶线性常微分方程的定解问题,可令 $U_n(t)=W_n(t)+Z_n(t)$,其中 $W_n(t)$和 $Z_n(t)$分别满足定解问题(Ⅷ)与(Ⅸ):

$$(\text{Ⅷ})\begin{cases} W_n''(t)+\left(\dfrac{an\pi}{l}\right)^2W_n(t)=0,\\ W_n(0)=\phi_n,\\ W_n'(0)=\psi_n,\quad n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

$$(\text{Ⅸ})\begin{cases} Z_n''(t)+\left(\dfrac{an\pi}{l}\right)^2Z_n(t)=f_n(t),\\ Z_n(0)=0,\\ Z_n'(0)=0,\quad n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

其中,定解问题(Ⅷ)是齐次二阶常系数线性常微分方程的初值问题,易知其解为

$$W_n(t)=\phi_n\cos\frac{an\pi}{l}t+\frac{l}{an\pi}\psi_n\sin\frac{an\pi}{l}t.$$

而定解问题(Ⅸ)与定解问题(Ⅳ)是相同的,所以有

$$Z_n(t)=\frac{l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

综上，得定解问题（Ⅰ）的解为

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\phi_n\cos\frac{an\pi}{l}t+\frac{l}{an\pi}\psi_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$
$$+\frac{l}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

以上讨论的是第一类边界条件的情况.若边界条件不是第一类的，上面的方法仍可用，不同的仅是 $g(x,t)$ 的形式.如：

(1) $u|_{x=0}=\mu_1(t)$，$u_x|_{x=l}=\mu_2(t)$，

则可取

$$g(x,t)=\mu_1(t)+\mu_2(t)x.$$

(2) $u_x|_{x=0}=\mu_1(t)$，$u|_{x=l}=\mu_2(t)$，

则可取

$$g(x,t)=\mu_1(t)(x-l)+\mu_2(t).$$

(3) $u_x|_{x=0}=\mu_1(t)$，$u_x|_{x=l}=\mu_2(t)$，

则可取

$$g(x,t)=\frac{1}{2l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)]x^2+\mu_1(t)x.$$

需指出的是 $g(x,t)$ 的选取不是惟一的，例如可取关于 x 的三角函数来代替关于 x 的多项式等.

习　　题

1. 解下列初边值问题：

(a) $$\begin{cases}u_{tt}=c^2u_{xx}, & 0<x<1,\quad t>0,\\ u(x,0)=x(1-x), & \\ u_t(x,0)=0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ u(0,t)=u(1,t)=0;\end{cases}$$

(b) $$\begin{cases}u_{tt}=c^2u_{xx}, & 0<x<\pi,\quad t>0,\\ u(x,0)=3\sin x, & \\ u_t(x,0)=0, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0.\end{cases}$$

2. 确定下列初边值问题的解：

(a)
$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0, & 0<x<\pi, \quad t>0, \\ u(x,0)=0, & \\ u_t(x,0)=8\sin^2 x, & 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0; & \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0, & 0<x<1 \quad t>0, \\ u(x,0)=0, & \\ u_t(x,0)=x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ u(0,t)=u(1,t)=0. & \end{cases}$$

3. 求下列初边值问题的解：

(a)
$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0, & 0<x<1, \quad t>0, \\ u(x,0)=x(1-x), & \\ u_t(x,0)=9, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ u(0,t)=u(1,t)=0; & \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0, & 0<x<\pi \quad t>0, \\ u(x,0)=\sin x, & \\ u_t(x,0)=x^2, & 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0. & \end{cases}$$

4. 解下列初边值问题：

(a)
$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0, & 0<x<\pi, \quad t>0, \\ u(x,0)=x^3, & 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ u_t(x,0)=0, & \\ u(0,t)=0, & \\ u_x(\pi,t)=0; & \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0, & 0<x<\pi \quad t>0, \\ u(x,0)=\sin x, & \\ u_t(x,0)=0, & 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ u_x(0,t)=0, \quad u_x(\pi,t)=0. & \end{cases}$$

5. 用分离变量法解下列电报问题：

$$\begin{cases} u_{tt}+au_t+bu=c^2u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad t>0, \\ u(x,0)=f(x), \\ u_t(x,0)=0, \\ u(0,t)=u(l,t)=0. \end{cases}$$

6. 求下列阻尼波动问题的解：

$$\begin{cases} u_{tt}+au_t=c^2u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad t>0, \\ u(x,0)=0, \\ u_t(x,0)=g(x), \\ u(0,t)=u(l,t)=0. \end{cases}$$

7. 一圆形横截面的轴作扭转振动时的偏微分方程可归结为

$$\theta_{tt} = a^2\theta_{xx},$$

其中 $\theta(x,t)$是横截面的角位移,a 是物理常数.假设轴的两端是弹性固定的,即在边界上满足条件

$$\theta_x(0,t) - h\theta(0,t) = 0, \quad \theta_x(l,t) + h\theta(l,t) = 0.$$

如果初始角位移是 $f(x)$,初始角速度是零,试确定角位移 $\theta(x,t)$.

8. 求解一高为 l,上底和下底的半径分别为 r 和 a 的截锥的纵振动问题.此时纵振动方程为

$$\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right], \quad 0<x<l, \quad t>0,$$

其中 $c^2=E/\rho$,E 是弹性模量,ρ 是密度,$h=la/(a-r)$.如果截锥的两端是刚性固定的,初始位移是 $f(x)$,初始速度是零,试求纵向位移 $u(x,t)$.

9. 验证下列初边值问题的形式解确实是定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2u_{xx}, & 0<x<\pi, \quad t>0, \\ u(x,0) = f(x), & 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ u_t(x,0) = g(x), & 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ u_x(0,t) = 0, & u_x(\pi,t) = 0. \end{cases}$$

10. 证明下列初边值问题的解的惟一性:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2u_{xx}, & 0<x<\pi, \quad t>0, \\ u(x,0) = f(x), & 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ u_t(x,0) = g(x), & 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ u_x(0,t) = 0, & u_x(\pi,t) = 0. \end{cases}$$

11. 确定下列定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2u_{xx} + A\sinh x, \quad 0<x<l, \quad t>0, \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = h, \quad u(l,t) = k, \end{cases}$$

其中 A,h 和 k 都是常数.

12. 解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2u_{xx} + Ax, \quad 0<x<l, \quad t>0 \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \end{cases}$$

13. 解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2u_{xx} + x^2, \quad 0<x<1, \quad t>0, \\ \left.\begin{aligned} &u(x,0) = x, \\ &u_t(x,0) = 0, \end{aligned}\right\} \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1, \quad t\geqslant 0. \end{cases}$$

14. 求下列定解问题的解：

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + h, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(1 - \cos\pi x), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 2u_0, \end{cases}$$

其中 h 和 u_0 都是常数.

15. 求下列初边值问题的解：

(a) $$\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, & 0<x<1, \quad t>0, \\ u(x,0) = x^2(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0; \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0<x<\pi, \quad t>0, \\ u(x,0) = \sin^2 x, & 0\leqslant x\leqslant \pi, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0; \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0<x<2, \quad t>0, \\ u(x,0) = x, & 0\leqslant x\leqslant 2, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(2,t) = 0; \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0<x<l, \quad t>0, \\ u(x,0) = \sin\pi x/l, & 0\leqslant x\leqslant l, \\ u(0,t) = a, \quad u(l,t) = b, & t>0, \end{cases}$$

其中 a 和 b 都是常数.

16. 一长度为 l 的杆的表面是绝热的，且初始温度分布为 $x(l-x)$. 求杆的温度分布.

17. 一长度为 π 的杆的 $x=0$ 的一端温度保持零度，而在另一端 $x=\pi$ 处以正比于温度的速率流出热量. 设初始温度为 $f(x)=x$，求杆的温度分布.

18. 一输电线的电压分布满足方程

$$v_t = kv_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

在 $x=l$ 一端的电压保持为零，在 $x=0$ 一端的电压按下列规律变化：

$$v(0,t) = Ct, \quad t > 0,$$

其中 C 是常数. 如果初始电压分布为零，求电压 $v(x,t)$.

19. 验证下列初边值问题的形式解确实是定解问题的解：

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) = 0. \end{cases}$$

20. 证明下列定解问题的解的惟一性：

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0. \end{cases}$$

21. 求解下列放射衰变问题:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = Ae^{-\alpha x}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0. \end{cases}$$

22. 确定下列定解问题的解:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} - hu, & -\pi < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t), & t \geqslant 0, \\ u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t), & t \geqslant 0. \end{cases}$$

(提示:利用代换 $u(x,t) = e^{-ht}v(x,t)$.)

23. 求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \dfrac{\omega}{g}\Phi(x)\sin\omega t, & 0 < x < l, \quad 0 < t, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = 0, & t \geqslant 0, \\ u(l,t) = 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

24. 求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + Ax, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \dfrac{4h}{l}x(l-x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = 0, & t \geqslant 0, \\ u(l,t) = 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

25. 求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + 3x, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 8x(1-x), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u(0,t) = 0, & t \geqslant 0, \\ u(l,t) = 3\sin t, & t > 0. \end{cases}$$

26. 求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + x, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u_x(0,t) = 0, & t \geqslant 0, \\ u(l,t) = 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

第七章　本征值问题与特殊函数

本章讨论分离变量法的理论基础——本征值与本征函数问题，同时介绍特殊函数及其对于奇异的施图姆-刘维尔问题的应用.

7.1　施图姆-刘维尔问题

在上一章中，我们用分离变量法确定了偏微分方程的解. 在变量可分离的条件下，我们把二阶齐次偏微分方程变为 6.1 节的两个常微分方程(6.1.11)和(6.1.12)，它们的形式是

$$c_1(x)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+c_2(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+[c_3(x)+\lambda]u=0. \qquad (7.1.1)$$

如果在方程(7.1.1)中引入

$$p(x)=e^{\int\frac{c_2}{c_1}\mathrm{d}x},q(x)=\frac{c_3}{c_1}p,s(x)=\frac{1}{c_1}p, \qquad (7.1.2)$$

就可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+[q+\lambda s]u=0, \qquad (7.1.3)$$

这个方程称为*施图姆-刘维尔方程*. 利用自伴算子

$$L=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+q, \qquad (7.1.4)$$

可把方程(7.1.3)简写为下列形式：

$$L(u)+\lambda s(x)u=0. \qquad (7.1.5)$$

在施图姆-刘维尔方程(7.1.3)中，λ 是与 x 无关的参数，而 $p(x)$，$q(x)$和 $s(x)$都是实值函数. 为了保证解的存在，我们设 $q(x)$和 $s(x)$在有限闭区间 $[a,b]$上都是连续的，而 $p(x)$在$[a,b]$上是连续可微的.

如果函数 $p(x)$和 $s(x)$在区间$[a,b]$上都是正的，那么施图姆-刘维尔方程称为在区间$[a,b]$上是*正则的*. 当所给定的区间是半无限区间或无限区间时，或者当 $p(x)$或 $s(x)$在有限区间$[a,b]$的一个端点或两个端点处等于零时，施图姆-刘维尔方程称为是*奇异的*. 施图姆-刘维尔方程带有经过分离变量后的端点条件

$$\begin{cases} a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0, & (7.1.6) \\ b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0 & (7.1.7) \end{cases}$$

的问题称为施图姆-刘维尔问题或施图姆-刘维尔系,其中 u 的右上角的撇号"$'$"表示求导数,而常数 a_1 和 a_2,b_1 和 b_2 都是不全为零的实数.使得施图姆-刘维尔问题有非零解的 λ 值,称为这个问题的本征值,而对应于本征值的非零解称为本征函数.一个正则施图姆-刘维尔问题的所有本征值的集合称为这个问题的谱.

【例 7.1.1】 求下列施图姆-刘维尔问题的本征值和本征函数:

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, & \text{当 } 0 < x < \pi, \\ u(0) = 0, & u'(\pi) = 0. \end{cases}$$

在这种情况下,$p=1, q=0, s=1$.如果 $\lambda=0$,那么方程的通解是

$$u(x) = Ax + B.$$

利用 $u(0)=0$,得 $B=0$,再由 $u'(\pi)=0$,可得 $A=0$.因此 $\lambda=0$ 不是本征值.

当 $\lambda<0$ 时,方程的通解是

$$u(x) = A e^{\sqrt{-\lambda}x} + B e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

把它代入端点条件,得到

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ \sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda}\pi} A - \sqrt{-\lambda}\, e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} B = 0. \end{cases}$$

由此解得 $A=B=0$.因此已知的施图姆-刘维尔问题存在的惟一解是零解.

当 $\lambda>0$ 时,施图姆-刘维尔方程的通解是

$$u(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

利用条件 $u(0)=0$,得 $A=0$.由条件 $u'(\pi)=0$,可得

$$B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0.$$

因为 $\lambda=0$ 不是本征值,所以为了使已知的施图姆-刘维尔问题有非零解,必须

$$\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0, \quad B \neq 0.$$

因此本征值是

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4}, \quad n = 1,2,3,\cdots,$$

而对应的本征函数是

$$\sin\frac{(2n-1)}{2}x, \quad n = 1,2,3,\cdots.$$

【例 7.1.2】 给定柯西方程

$$x^2u'' + xu' + \lambda u = 0, \quad 1 < x < e,$$

和端点条件

$$u(1) = 0, \quad u(e) = 0.$$

求这个施图姆-刘维尔问题的本征值和本征函数.

利用变换(7.1.2),可把柯西方程改写成

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) + \frac{1}{x}\lambda u = 0.$$

这时,$p(x)=x, q(x)=0, s(x)=\frac{1}{x}$.柯西方程的解的形式为 x^m,因此 m 满足下列方程:

$$m^2 + \lambda = 0,$$

即

$$m = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

因而柯西方程的通解是

$$u(x) = C_1x^{i\sqrt{\lambda}} + C_2x^{-i\sqrt{\lambda}}.$$

注意到

$$x^{ia} = e^{ia\ln x} = \cos(a\ln x) + i\sin(a\ln x),$$

于是 u 变为

$$u(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\ln x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\ln x).$$

其中 A 和 B 都是与 C_1 和 C_2 有关的任意常数.由端点条件 $u(1)=0$,得 $A=0$,而由端点条件 $u(e)=0$,可得

$$B\sin\sqrt{\lambda} = 0,$$

由上式可得到本征值

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad n = 1,2,3,\cdots.$$

和对应的本征函数

$$\sin(n\pi\ln x), \quad n = 1,2,3,\cdots.$$

当 $p(a)=p(b)$时,出现另一种类型的施图姆-刘维尔问题,在这种情况下,可给定周期端点条件

$$u(a) = u(b),$$
$$u'(a) = u'(b).$$

这种正则施图姆-刘维尔方程带有周期端点条件的问题称为周期施图姆-刘维尔问题.

【例 7.1.3】 解周期施图姆-刘维尔问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \quad -\pi < x < \pi, \\ u(-\pi) = u(\pi), \\ u'(-\pi) = u'(\pi). \end{cases}$$

注意到 $p(x) \equiv 1$，于是 $p(-\pi) = p(\pi)$. 当 $\lambda > 0$ 时，这个施图姆-刘维尔方程的通解是

$$u(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

把这个解代入周期端点条件，得到下面两个方程：

$$\begin{cases} (A\cos\sqrt{\lambda}\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\pi) \\ \quad -(A\cos\sqrt{\lambda}\pi - B\sin\sqrt{\lambda}\pi) = 0, \\ (-A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi) \\ \quad -(A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi) = 0. \end{cases}$$

因此

$$(2\sin\sqrt{\lambda}\pi)B = 0,$$
$$(2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi)A = 0.$$

因为这个 $u(x)$ 是当 $\lambda > 0$ 时的解，所以对于任意的 A 和 B，我们有

$$\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0.$$

因而

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1,2,3,\cdots.$$

因为对任意的 A 和 B，$\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$ 都是满足的，所以对应于同一个本征值 n^2，可以得到两个线性无关的本征函数 $\cos nx$ 和 $\sin nx$.

不难看出，如果 $\lambda < 0$，那么方程的非零解不能满足周期端点条件. 但是，当 $\lambda = 0$ 时，对应的本征函数是 1. 于是上述这个施图姆-刘维尔问题的本征值是 $0, \{n^2\}$，而对应的本征函数是 $1, \{\cos nx\}$ 和 $\{\sin nx\}$，其中 n 是任意正整数.

7.2 本征函数

在正则施图姆-刘维尔问题的例 7.1.1 和例 7.1.2 中，我们看到对应于本征值 λ，只存在一个线性无关的本征函数，这个本征值称为**单重本征值**（也称为**单本征值**）. 如果对应于同一个本征值，存在 k 个线性无关的本征函数，这个本征值就称为 **k 重本征值**. 在周期施图姆-刘维尔问题的例 7.1.3 中，对应于同一个本征值 n^2 的本征函数是 $\cos nx$ 和 $\sin nx$. 因此这个本征值是二重本

征值.

现在我们来证明,正交性是施图姆-刘维尔问题的本征函数系的一个特性.

定理 7.2.1 设施图姆-刘维尔问题中的系数 p,q 和 s 都在$[a,b]$上连续,而且对应于不同的本征值 λ_j 和 λ_k 的本征函数 u_j 和 u_k 都连续可微,那么 u_j 和 u_k 在$[a,b]$上带权函数 s 正交.

证明 因为对应于 λ_j 的 u_j 是施图姆-刘维尔方程的解,所以有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pu_j') + (q + \lambda_j s)u_j = 0. \tag{7.2.1}$$

同理,u_k 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pu_k') + (q + \lambda_k s)u_k = 0. \tag{7.2.2}$$

以 u_k 乘式(7.2.1),以 u_j 乘式(7.2.2),并相减,得到

$$\begin{aligned}(\lambda_j - \lambda_k)su_ju_k &= u_k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pu_j') - u_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pu_k') \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(pu_j')u_k - (pu_k')u_j].\end{aligned}$$

对上式两边从 a 到 b 积分,可得

$$\begin{aligned}(\lambda_j - \lambda_k)\int_a^b su_ju_k\mathrm{d}x &= [p(u_j'u_k - u_ju_k')]_a^b \\ &= p(b)[u_j'(b)u_k(b) - u_j(b)u_k'(b)] \\ &\quad - p(a)[u_j'(a)u_k(a) - u_j(a)u_k'(a)].\end{aligned} \tag{7.2.3}$$

上式右边称为施图姆-刘维尔问题的边界项.本征函数 u_j 和 u_k 在 $x=b$ 处满足的端点条件是

$$b_1u_j(b) + b_2u_j'(b) = 0, \tag{7.2.4}$$

$$b_1u_k(b) + b_2u_k'(b) = 0, \tag{7.2.5}$$

如果 $b_2\neq0$,以 $u_k(b)$乘式(7.2.4),以 $u_j(b)$乘式(7.2.5),并相减,就得到

$$b_2[u_j'(b)u_k(b) - u_j(b)u_k'(b)] = 0. \tag{7.2.6}$$

类似地,在 $x=a$ 处,如果 $a_2\neq0$,就可得到

$$a_2[u_j'(a)u_k(a) - u_j(a)u_k'(a)] = 0. \tag{7.2.7}$$

因此,由式(7.2.6)和(7.2.7),当 $b_2\neq0$ 和 $a_2\neq0$ 时,边界项等于零.

如果 $b_2=0$,那么 $b_1\neq0$,于是由式(7.2.4)和(7.2.5),得 $u_j(b)=u_k(b)=0$.类似地,如果 $a_2=0$,就有 $u_j(a)=u_k(a)=0$,所以边界项也等于零.

因此,由式(7.2.3),我们有

$$(\lambda_j-\lambda_k)\int_a^b su_ju_k\mathrm{d}x=0.$$

因为 λ_j 和 λ_k 是不同的本征值,所以有

$$\int_a^b su_ju_k\mathrm{d}x=0,\quad j\neq k. \tag{7.2.8}$$

本定理证毕.

推理 7.2.1 在$[a,b]$上的周期施图姆-刘维尔问题的本征函数系在$[a,b]$上是带权函数 s 正交的.

证明 本征函数 u_j 和 u_k 的周期端点条件是

$$u_j(a)=u_j(b),\quad u_j'(a)=u_j'(b),$$
$$u_k(a)=u_k(b),\quad u_k'(a)=u_k'(b).$$

把这些式子代入式(7.2.3),可得

$$\begin{aligned}&(\lambda_j-\lambda_k)\int_a^b su_ju_k\mathrm{d}x\\&=[p(b)-p(a)][u_j'(a)u_k(a)-u_j(a)u_k'(a)].\end{aligned}$$

因为 $p(a)=p(b)$,我们有

$$(\lambda_j-\lambda_k)\int_a^b su_ju_k\mathrm{d}x=0.$$

由于 $\lambda_j\neq\lambda_k(j\neq k)$,因此

$$\int_a^b su_ju_k\mathrm{d}x=0,\quad j\neq k. \tag{7.2.9}$$

本推论证毕.

定理 7.2.2 如果 $s>0$,那么正则施图姆-刘维尔问题的所有本征值都是实数.

证明 假定有一个复本征值 $\lambda_j=\alpha+\mathrm{i}\beta$,其对应的本征函数是 $u_j=v+\mathrm{i}w$.那么,因为方程的系数都是实的,所以这个本征值的共轭复数也是本征值.于是存在对应于本征值 $\lambda_k=\alpha-\mathrm{i}\beta$ 的本征函数 $u_k=v-\mathrm{i}w$.因为 u_j 和 u_k 对权函数 s 正交,即

$$(\lambda_j-\lambda_k)\int_a^b su_ju_k\mathrm{d}x=0,$$

所以有

$$2\beta\int_a^b s(v^2+w^2)\mathrm{d}x=0.$$

这就是说当 $s>0$ 时,β 必须等于零.因此本征值都是实数,本定理证毕.

定理 7.2.2 指出施图姆-刘维尔问题的所有本征值都是实数,但它并不保

证问题有任何本征值存在.然而,可以证明施图姆-刘维尔问题有可数无穷多个本征值.

定理 7.2.3　任何正则施图姆-刘维尔问题存在一个实本征值的无穷序列

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots,$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$,且对应的本征函数 u_n(除常数因子外是惟一确定的)在区间 (a,b) 内恰好有 n 个零点.此外,这些本征函数组成一个完备的正交系.

在 $[a,b]$ 上分段光滑的任意一个函数 $f(x)$,如果满足正则施图姆-刘维尔问题的端点条件,那么可以按本征函数系展开为绝对且一致收敛的级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n, \tag{7.2.10}$$

其中

$$c_n = \int_a^b sfu_n\mathrm{d}x \Big/ \int_a^b su_n^2\mathrm{d}x, \quad n = 1,2,3,\cdots.$$

【例 7.2.1】　考察一长为 l 的圆柱形的金属线,它的表面是完全绝热的.在 $x=0$ 一端温度保持零度,而在另一端热量可自由散发到温度为零度的周围介质中去.设金属线的初始温度为 $f(x)$.现在我们要求出下列初边值问题的温度分布 $u(x,t)$:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ hu(l,t) + u_x(l,t) = 0, & t > 0, \quad h > 0. \end{cases} \tag{7.2.11}$$

用分离变量法,设解的形式为

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

把它代入热传导方程,得到

$$XT' = kX''T,$$

即

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda, \quad \lambda > 0.$$

这里选 λ 前有负号,是要使解能表示热量随着时间是衰变的.由上述关系式,我们有

$$X'' + \lambda X = 0,$$
$$T' + k\lambda T = 0.$$

这第二个方程的解是

$$T(t) = Ce^{-k\lambda t},$$

其中 C 是任意常数.由第一个边界条件 $u(0,t)=0$,因为 $T(t)\neq 0$,所以有

$$X(0) = 0.$$

同样,由第二个边界条件,可得

$$hX(l) + X'(l) = 0.$$

因此,我们接下来要解下面的本征值问题:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \\ hX(l) + X'(l) = 0. \end{cases} \tag{7.2.12}$$

这是一个当 $p=1,q=0,s=1,a_1=1,a_2=0,b_1=h,b_2=1$ 时的施图姆-刘维尔问题.这个施图姆-刘维尔方程的解是

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

因为 $X(0)=0$,所以得 $A=0$,我们有

$$X(x) = B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

这个解还应满足第二个端点条件,由于 $B\neq 0$,因此必须有

$$h\sin\sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0.$$

上式可改写成

$$\tan\sqrt{\lambda}l = -\sqrt{\lambda}/h.$$

如果在上述方程中引入 $\alpha=\sqrt{\lambda}l$,就有

$$\tan\alpha = -a\alpha, \tag{7.2.13}$$

其中 $a=1/hl$.因为这个方程没有显式解,所以可通过画出函数 $\xi=\tan\alpha$ 和 $\xi=-a\alpha$ 的图形,如图 7.1 所示,用图解法求其近似解.方程(7.2.13)的这些根

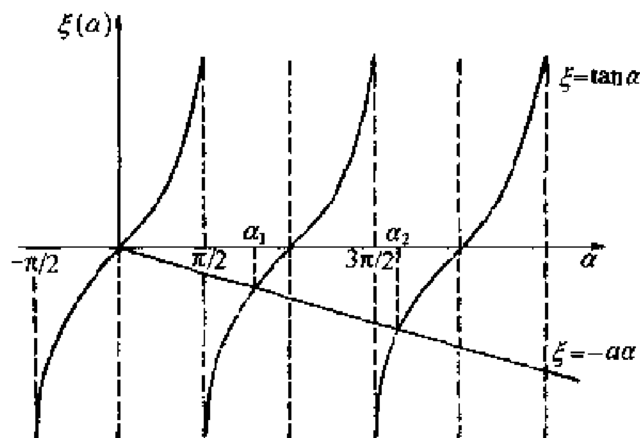


图 7.1

由两条曲线的交点给出，且显然由图可见，当 $n=1,2,3,\cdots$ 时，有无穷多个根 α_n. 对于每个根 α_n，有对应的本征值

$$\lambda_n = (\alpha_n/l)^2, \quad n = 1,2,3,\cdots.$$

于是，存在一个本征值序列

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots,$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$. 这时对应的本征函数是 $\sin\sqrt{\lambda_n}x$，因此

$$X_n(x) = B_n \sin\sqrt{\lambda_n}x.$$

所以解具有下列形式：

$$u_n(x,t) = a_n e^{-k\lambda_n t}\sin\sqrt{\lambda_n}x, \quad a_n = B_n C_n,$$

这些解是满足热传导方程和边界条件的. 因为热传导方程和边界条件都是线性齐次的，所以把这些解叠加起来，组成级数

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k\lambda_n t}\sin\sqrt{\lambda_n}x.$$

假定这个级数是收敛的，且对 x 是二次可微和对 t 是可微的，那么它也是一个满足热传导方程和边界条件的解. 根据定理 7.2.3，这些本征函数 $\sin\sqrt{\lambda_n}x$ 在区间 $[0,l]$ 上组成一个完备的正交系. 利用初始条件，可得

$$u(x,0) = f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\sqrt{\lambda_n}x.$$

如果我们假设 $f(x)$ 是 $[0,l]$ 上的分段光滑函数，那么由定理 7.2.3，可把 $f(x)$ 按本征函数系展开，且写成

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\sqrt{\lambda_n}x,$$

其中系数 a_n 为

$$a_n = \int_0^l f(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x\,dx \Big/ \int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_n}x\,dx.$$

因此温度分布为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l f(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x\,dx \Big/ \int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_n}x\,dx\right] \cdot e^{-k\lambda_n t}\sin\sqrt{\lambda_n}x.$$

7.3 贝塞尔函数

贝塞尔函数是一类与奇异的施图姆-刘维尔问题密切相关的特殊函数，他

所对应的贝塞尔方程经常出现在圆柱对称的数学物理问题中.一般来说,贝塞尔函数不能用初等函数表示,而表示成级数形式.

贝塞尔方程的标准形式为

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{7.3.1}$$

其中 ν 是非负实数.因为点 $x=0$ 是贝塞尔方程的奇点,所以按照通常的方法,解可取为

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k}, \tag{7.3.2}$$

其中指数 s 是待定的.把这个幂级数代入方程(7.3.1),则得

$$\begin{aligned}&[s(s-1)+s-\nu^2]a_0x^s + [(s+1)s+(s+1)-\nu^2]a_1x^{s+1}\\&+\sum_{k=2}^{\infty}\{[(s+k)(s+k)-\nu^2]a_k + a_{k-2}\}x^{s+k} = 0.\end{aligned} \tag{7.3.3}$$

令 x^s 的系数等于零,就可得到下列指数方程:

$$(s^2 - \nu^2)a_0 = 0, \tag{7.3.4}$$

对任意的 $a_0 \neq 0$,由此方程可推得 $s = \pm\nu$.因为在幂级数(7.3.2)中的首项是 a_0x^s,显然,当 $\nu > 0$ 时,对应于选取 $s=\nu$ 的贝塞尔方程的解在原点等于零,而对应于选取 $s=-\nu$ 的解在原点变为无穷大.

我们首先考察贝塞尔方程的正则解,即对应于选取 $s=\nu$ 的解.令等式(7.3.3)中的 x^{s+1} 的系数等于零,那么有

$$(2\nu+1)a_1 = 0. \tag{7.3.5}$$

这就是说 $a_1=0$(因为 $\nu \geqslant 0$).令等式(7.3.3)中的 x^{s+k} 的系数等于零,我们就得到递推公式

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2\nu+k)}. \tag{7.3.6}$$

因为 $a_1=0$,显然当 $k=3,5,7,\cdots$ 时,就有 $a_k=0$.其余的 a_k 为

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}k!(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)} \quad (k=1,2,3,\cdots). \tag{7.3.7}$$

这个关系式也可写成

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k 2^\nu \Gamma(\nu+1)a_0}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(\nu+k+1)} \quad (k=1,2,3,\cdots), \tag{7.3.8}$$

其中 $\Gamma(z)$ 是伽马函数,它的性质在附录Ⅰ中加以介绍.

因此,贝塞尔方程的正则解具有下列形式:

$$y(x)=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^\nu\Gamma(\nu+1)}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(\nu+k+1)}x^{2k+\nu}. \tag{7.3.9}$$

通常选取

$$a_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}, \tag{7.3.10}$$

这时由级数所定义的解记为 $J_\nu(x)$,称为第一类 ν 阶贝塞尔函数,于是

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(\nu+k+1)}. \tag{7.3.11}$$

为了确定贝塞尔方程的非正则解,我们选取指数 $s=-\nu$,并且用上面同样的方法,得到与式(7.3.5)类似的关系式

$$(-2\nu+1)a_1=0.$$

由此推得,除了当 $\nu=\frac{1}{2}$ 外,$a_1=0$.(我们先假设 $\nu\neq\frac{1}{2}$,$\nu=\frac{1}{2}$ 的情况将在下面提到.)

利用递推公式

$$a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(k-2\nu)},\quad k\geqslant 2, \tag{7.3.12}$$

就可得到非正则解

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k-\nu}}{2^{2k-\nu}k!\Gamma(-\nu+k+1)}, \tag{7.3.13}$$

这个解称为第一类 $-\nu$ 阶贝塞尔函数.

容易证明 J_ν 和 $J_{-\nu}$ 对所有 x 都收敛,且当 ν 不是整数时,它们是线性无关的.因此,当 $\nu\geqslant 0$ 且不是整数时,贝塞尔方程的通解是

$$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x). \tag{7.3.14}$$

如果 ν 是整数,比如说 $\nu=n$,那么由式(7.3.13),我们有

$$\begin{aligned}J_{-n}(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k-n}}{2^{2k-n}k!\Gamma(-n+k+1)}\\&=(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k+n}}{2^{2k+n}k!\Gamma(n+k+1)},\end{aligned}$$

这是在和式中以指标 k 代替 $k-n$ 后得到的.

因此

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x), \tag{7.3.15}$$

这说明 J_{-n} 与 J_n 不是线性无关的,所以还需求出第二个与 J_n 线性无关的特解.通常采用的一个非正则特解是

$$Y_\nu(x)=\frac{(\cos\nu\pi)J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{7.3.16}$$

这个解称为第二类 ν 阶贝塞尔函数. 当 ν 是整数或非整数时, $Y_\nu(x)$ 都是与 $J_\nu(x)$ 线性无关的.

因此, 贝塞尔方程的通解为

$$\begin{cases} y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x), & \text{当 } \nu \text{ 不是整数}, \\ y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x), & \text{当 } \nu = n \text{ 是整数}, \\ y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x), & \text{当 } \nu \text{ 是一切实数}. \end{cases} \tag{7.3.17}$$

贝塞尔函数像三角函数、对数函数和指数函数这些初等函数一样, 对许多 ν 值都已列成函数表. 对于小的 x 值, 函数 J_ν 和 Y_ν 可以毫无困难地用表列出并画成图形, 如图 7.2 所示.

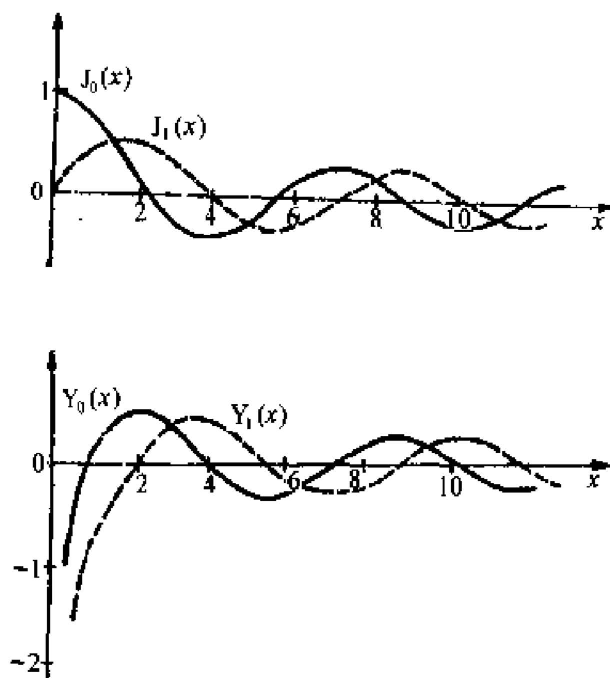


图 7.2

应该注意, 当 $\nu \geqslant 0$ 以及 ν 是负整数时, $J_\nu(0)$ 都是有限的, 而当 ν 是负的非整数时, $J_\nu(0)$ 为无穷大. 另外, 函数 $Y_\nu(x)$ 在原点都为无穷大, 且当 x 增大时, 它们的振幅是减小的.

使 $J_\nu(x)=0$ 或 $Y_\nu(x)=0$ 的 x 值, 称为贝塞尔函数的零点.

我们不加证明地列出一些有用的递推公式:

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \tag{7.3.18}$$

$$\nu J_\nu(x) + x J'_\nu(x) = x J_{\nu-1}(x), \tag{7.3.19}$$

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(x) - \mathrm{J}_{\nu+1}(x) = 2\mathrm{J}_\nu'(x), \tag{7.3.20}$$

$$\nu \mathrm{J}_\nu(x) - x\mathrm{J}_\nu'(x) = x\mathrm{J}_{\nu+1}(x), \tag{7.3.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)] = x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(x), \tag{7.3.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu} \mathrm{J}_\nu(x)] = -x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(x). \tag{7.3.23}$$

所有这些递推公式对 $\mathrm{Y}_\nu(x)$ 也都成立.

贝塞尔函数还有以下一些渐近展开式:

当 $|x| \gg 1, |x| \gg n$ 时,有

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_n(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\Bigg\{&\left[1 - \frac{(4n^2-1)(4n^2-3^2)}{2!(8x)^2}\right.\\ &\left.+ \frac{(4n^2-1)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)(4n^2-7^2)}{4!(8x)^4} - \cdots\right]\cos\varphi \\ &- \left[\frac{(4n^2-1)}{8x} - \frac{(4n^2-1)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)}{3!(8x)^3} + \cdots\right]\sin\varphi\Bigg\},\end{aligned} \tag{7.3.24}$$

其中

$$\varphi = x - \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

当 x 很小时,有

$$\mathrm{J}_0(x) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2, \tag{7.3.25}$$

$$\mathrm{J}_n(x) \approx \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad n > 0. \tag{7.3.26}$$

当 $|x| \gg 1, |x| \gg n$ 时,有

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}_n(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\Bigg\{&\left[1 - \frac{(4n^2-1)(4n^2-3^2)}{2!(8x)^2}\right.\\ &\left.+ \frac{(4n^2-1)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)(4n^2-7^2)}{4!(8x)^4} - \cdots\right]\sin\varphi \\ &+ \left[\frac{(4n^2-1)}{8x} - \frac{(4n^2-1)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)}{3!(8x)^3} + \cdots\right]\cos\varphi\Bigg\},\end{aligned} \tag{7.3.27}$$

其中

$$\varphi = x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

当 x 很小时,有

$$\mathrm{Y}_0(x) \approx \frac{2}{\pi}\lg x, \tag{7.3.28}$$

$$\mathrm{Y}_n(x) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n, \quad n = 1,2,3,\cdots. \tag{7.3.29}$$

当 $\nu = \pm\frac{1}{2}$ 时,贝塞尔函数可用初等函数表示为

$$\mathrm{J}_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\sin x, \tag{7.3.30}$$

$$\mathrm{J}_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\cos x. \tag{7.3.31}$$

贝塞尔函数在区间$[0,a]$上是带权函数 x 相互正交的.特别是

$$\int_0^a \mathrm{J}_n(\lambda_{ni}x)\mathrm{J}_n(\lambda_{nj}x)x\,\mathrm{d}x = 0, \quad i \neq j.$$

当 $i=j$ 时,模 N_{nj} 由下式给出:

$$N_{nj}^2 = \frac{1}{2\lambda_{nj}^2}\left\{x^2\left[\frac{\mathrm{dJ}_n(\lambda_{nj}x)}{\mathrm{d}x}\right]^2 + (\lambda_{nj}^2x^2 - n^2)[\mathrm{J}_n(\lambda_{nj}x)]^2\right\}\Bigg|_0^a, \tag{7.3.32}$$

其中 λ_{nj} 是下列方程的根:

$$\mathrm{J}_n(\lambda_{nj}a) + h\frac{\mathrm{dJ}_n(\lambda_{nj}a)}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{7.3.33}$$

与贝塞尔函数有密切联系的是所谓的第一类汉克尔函数和第二类汉克尔函数,它们可分别定义为

$$\begin{cases}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x) = \mathrm{J}_\nu(x) + \mathrm{i}\mathrm{Y}_\nu(x),\\ \mathrm{H}_\nu^{(2)}(x) = \mathrm{J}_\nu(x) - \mathrm{i}\mathrm{Y}_\nu(x),\end{cases} \tag{7.3.34}$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

其他与贝塞尔函数有密切联系的函数是修正贝塞尔函数.我们考察含有参数 λ 的贝塞尔方程,即

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0. \tag{7.3.35}$$

这个方程的通解是

$$y(x) = C_1\mathrm{J}_\nu(\lambda x) + C_2\mathrm{Y}_\nu(\lambda x).$$

如果 $\lambda=\mathrm{i}$,那么

$$y(x) = C_1\mathrm{J}_\nu(\mathrm{i}x) + C_2\mathrm{Y}_\nu(\mathrm{i}x).$$

我们可把 $\mathrm{J}_\nu(\mathrm{i}x)$写成

$$\mathrm{J}_\nu(\mathrm{i}x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\mathrm{i}x)^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(\nu+k+1)} = \mathrm{i}^\nu\mathrm{I}_\nu(x),$$

其中

$$I_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(\nu+k+1)}. \tag{7.3.36}$$

$I_\nu(x)$称为第一类 ν 阶修正贝塞尔函数.同样我们可定义 $I_{-\nu}(x)$.像 J_ν 和 $J_{-\nu}$ 一样,除了当 ν 是整数外,I_ν 和 $I_{-\nu}$都是线性无关的解.所以,我们还要定义第二类 ν 阶修正贝塞尔函数为

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{7.3.37}$$

因此,我们得到修正贝塞尔方程

$$x^2y''+xy'-(x^2+\nu^2)y=0$$

的通解为

$$y(x)=C_1I_\nu(x)+C_2K_\nu(x). \tag{7.3.38}$$

应该注意

$$I_\nu(0)=\begin{cases}1, & 当\ \nu=0,\\ 0, & 当\ \nu>0,\end{cases} \tag{7.3.39}$$

且当 $x\to 0$ 时,K_ν 趋于无穷大.

含有贝塞尔函数的本征值问题将在下一节奇异施图姆-刘维尔问题中加以叙述.

7.4 奇异施图姆-刘维尔问题

如前面所述,当施图姆-刘维尔方程在半无限或无限区间上给定时,或者当系数 $p(x)$或 $s(x)$在有限区间的一个端点或两个端点处等于零时,施图姆-刘维尔方程称为是奇异的.奇异施图姆-刘维尔方程带有适当的线性齐次端点条件的问题称为奇异施图姆-刘维尔问题.但在现在的情况下,所加的端点条件与正则斯图姆-刘维尔问题中的经过分离变量后的端点条件的形式不一样.

经常必须给定的条件是函数 u 在奇异端点处要保持有界.

【例 7.4.1】 考察一圆形弹性薄膜的横振动方程

$$u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy}).$$

假设位移 u 对 θ 是对称的,上述方程用极坐标表示时,就变为

$$u_{tt}=c^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right).$$

现在我们来求下面定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right), & r < 1, \quad t > 0, \\ u(r,0) = f(r), & 0 \leqslant r \leqslant 1, \\ u_t(r,0) = 0, & 0 \leqslant r \leqslant 1, \\ u(1,t) = 0, & \\ \lim\limits_{r\to 0} u(r,t) < \infty, & t \geqslant 0. \end{cases} \tag{7.4.1}$$

用分离变量法,设解的形式为

$$u(r,t) = R(r)T(t),$$

代入波动方程,可得

$$\frac{R'' + (1/r)R'}{R} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = -\alpha^2,$$

其中 α 是正的常数.在 α^2 前选取负号,是为了要得到对时间的周期解.因此,我们得到两个常微分方程:

$$rR'' + R' + \alpha^2 rR = 0,$$

$$T'' + \alpha^2 c^2 T = 0.$$

第二个方程的解 $T(t)$ 为

$$T(t) = A\cos\alpha ct + B\sin\alpha ct. \tag{7.4.2}$$

在第一个方程中,注意到 $p = r$ 在 $r = 0$ 处等于零.由于对任意的 $T(t)$,有

$$\lim_{r\to 0} u(r,t) = \lim_{r\to 0} R(r)T(t) < \infty,$$

就可得到 $R(r)$ 的有界性条件

$$\lim_{r\to 0} R(r) < \infty.$$

由边界条件

$$u(1,t) = R(1)T(t) = 0,$$

因为 $T(t) \neq 0$,必定有

$$R(1) = 0.$$

现在我们要确定下列奇异施图姆-刘维尔问题的解 $R(r)$:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right] + \alpha^2 rR = 0, & (7.4.3) \\ R(1) = 0, & (7.4.4) \\ \lim\limits_{r\to 0} R(r) < \infty. & (7.4.5) \end{cases}$$

方程(7.4.3)是零阶贝塞尔方程,它的解为

$$R(r) = C\mathrm{J}_0(\alpha r) + D\mathrm{Y}_0(\alpha r), \tag{7.4.6}$$

其中 J_0 和 Y_0 分别是第一类和第二类零阶贝塞尔函数.因为当 $r \to 0$ 时,

$Y_0(\alpha r) \to -\infty$,所以由条件(7.4.5)应有 $D=0$. 因此

$$R(r) = CJ_0(\alpha r).$$

由剩下的条件 $R(1)=0$,可得

$$J_0(\alpha) = 0.$$

这个超越方程有无穷多个正的零点

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots.$$

于是定解问题(7.4.1)的分离变量的特解是

$$u_n(r,t) = J_0(\alpha_n r)(A_n \cos\alpha_n ct + B_n \sin\alpha_n ct)$$
$$(n = 1,2,3,\cdots).$$

因为定解问题(7.4.1)的方程和边界条件都是线性齐次的,假定级数

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\alpha_n r)(A_n \cos\alpha_n ct + B_n \sin\alpha_n ct) \tag{7.4.7}$$

收敛且对 r 和 t 充分可微,那么它也是一个解. 形式地把式(7.4.7)对 t 微分,就得到

$$u_t(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\alpha_n r)(-A_n \alpha_n c \sin\alpha_n ct + B_n \alpha_n c \cos\alpha_n ct).$$

利用初始条件 $u_t(r,0)=0$,可得 $B_n=0$. 所以,我们有

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) \cos\alpha_n ct. \tag{7.4.8}$$

现在 $u(r,t)$还应满足初始条件 $u(r,0)=f(r)$. 因此,我们有

$$u(r,0) = f(r) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r).$$

因为本征函数 $J_0(\alpha_n r)$在区间$[0,1]$上组成带权函数 r 的完备正交系,所以如果 $f(r)$在$[0,1]$上分段光滑,那么我们可形式地把 $f(r)$按这个本征函数系展开,于是

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r),$$

其中系数 A_n 可表示为

$$A_n = \int_0^1 r f(r) J_0(\alpha_n r) \mathrm{d}r \Big/ \int_0^1 r [J_0(\alpha_n r)]^2 \mathrm{d}r. \tag{7.4.9}$$

因此定解问题(7.4.1)的解由式(7.4.8)给出,其中系数 A_n 由式(7.4.9)确定.

7.5　勒让德函数

勒让德函数是另一类与奇异的施图姆-刘维尔问题密切相关的特殊函数,

他是超几何函数的特殊情形,所相应的勒让德方程出现于球对称的数学物理问题中.

勒让德方程是

$$(1-x^2)y''-2xy'+\nu(\nu+1)y=0, \tag{7.5.1}$$

其中 ν 是实数.因为 $x=\pm 1$ 是方程的奇点,所以我们假设方程的解为下列幂级数:

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k.$$

把这个幂级数逐项微分并代入方程(7.5.1),得到

$$\sum_{k=2}^{\infty}\{k(k-1)a_k+[\nu(\nu+1)-(k-1)(k-2)]a_{k-2}\}x^{k-2}=0.$$

因此,幂级数解的系数必须满足下列递推公式:

$$a_k=\frac{(k-1)(k-2)-\nu(\nu+1)}{k(k-1)}a_{k-2},\quad k\geqslant 2. \tag{7.5.2}$$

由上式,根据 a_0 可确定 $a_2,a_4,a_6,\cdots$,根据 a_1 可确定 $a_3,a_5,a_7,\cdots$,而 a_0 和 a_1 都是任意的.但这正是我们所需要的,因为在二阶微分方程的通解中应该有两个任意常数.

由递推公式(7.5.2)的另一个形式

$$a_{k+2}=-\frac{(\nu-k)(\nu+k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k,\quad k\geqslant 0, \tag{7.5.3}$$

可推得勒让德方程的解为

$$\begin{aligned}y(x)&=a_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\nu(\nu-2)\cdots(\nu-2k+2)\cdot(\nu+1)(\nu+3)\cdots(\nu+2k-1)}{(2k)!}\cdot x^{2k}\right]\\&\quad+a_1\left[x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\nu-1)(\nu-3)\cdots(\nu-2k+1)\cdot(\nu+2)(\nu+4)\cdots(\nu+2k)}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}\right]\\&=a_0p_\nu(x)+a_1q_\nu(x).\end{aligned} \tag{7.5.4}$$

容易证明,级数 $p_\nu(x)$和 $q_\nu(x)$当$|x|<1$ 时都收敛,且是线性无关的.

现在考察 $\nu=n$ 的情形,其中 n 是非负整数.那么由递推公式(7.5.3),当 $k=n$ 时,显然有

$$a_{n+2}=a_{n+4}=\cdots=0.$$

所以当 n 是偶数时,级数 $p_n(x)$只到 x^n 项为止,而 $q_n(x)$仍是无穷级数.当 n 是奇数时,级数 $q_n(x)$只到 x^n 项为止,而 $p_n(x)$仍是无穷级数.在第一种情形下(n 是偶数),$p_n(x)$是 n 次多项式;在第二种情形下(n 是奇数),$q_n(x)$也是 n 次多项式.

因此，对于任何非负整数 n，$p_n(x)$ 与 $q_n(x)$ 中只有一个是 n 次多项式．在适当把它们标准化后（见下面），这种多项式就用符号 $\mathrm{P}_n(x)$ 表示，并称为**第一类 n 阶勒让德函数或 n 次勒让德多项式**．通常，$\mathrm{P}_n(x)$ 定义为

$$\mathrm{P}_n(x)=\begin{cases}p_n(x)/p_n(1), & \text{当 } n \text{ 为偶数},\\ q_n(x)/q_n(1), & \text{当 } n \text{ 为奇数}.\end{cases} \tag{7.5.5}$$

$\mathrm{P}_n(x)$ 的更明显的公式是

$$\mathrm{P}_n(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}, \tag{7.5.6}$$

其中

$$N=\begin{cases}n/2, & \text{当 } n \text{ 为偶数},\\ (n-1)/2, & \text{当 } n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

开头几个勒让德多项式是

$$\mathrm{P}_0(x)=1,$$

$$\mathrm{P}_1(x)=x,$$

$$\mathrm{P}_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$\mathrm{P}_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$\mathrm{P}_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

对于小的 x 值，$\mathrm{P}_0(x)$，$\mathrm{P}_1(x)$，$\mathrm{P}_2(x)$ 和 $\mathrm{P}_3(x)$ 的图形如图 7.3 所示．

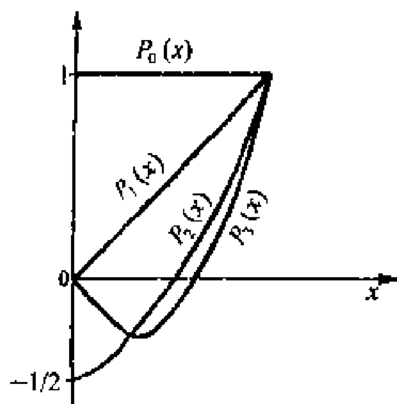


图 7.3

我们记得，对于给定的非负整数 n，勒让德方程的基本解组 $p_n(x)$ 和 $q_n(x)$ 中只有一个解是多项式，而另一个解是无穷级数．这个无穷级数经适当标准化后，称为**第二类勒让德函数**．它们定义为

$$\mathrm{Q}_n(x)=\begin{cases}p_n(1)q_n(x), & \text{当 } n \text{ 为偶数},\\ -q_n(1)p_n(x), & \text{当 } n \text{ 为奇数}.\end{cases} \tag{7.5.7}$$

这些函数的开头几项是

$$\mathrm{Q}_0(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

$$\mathrm{Q}_1(x)=\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1,$$

等等.

由开头几个勒让德函数,显然可以看到 $P_n(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是处处有限的,而 $Q_n(x)$ 在端点 $x=\pm 1$ 处不是有限的.在一般情形下这个结论也是成立的.

因此勒让德方程(其中 $\nu=n$)的通解是

$$y(x)=C_1P_n(x)+C_2Q_n(x). \tag{7.5.8}$$

勒让德多项式也可表示为下列形式:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \tag{7.5.9}$$

这个表示式称为罗德利格公式.

像贝塞尔函数一样,勒让德多项式也满足一些递推公式,重要的是

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0,\quad n\geqslant 1, \tag{7.5.10}$$

$$(x^2-1)P_n'(x)=nxP_n(x)-nP_{n-1}(x),\quad n\geqslant 1, \tag{7.5.11}$$

$$nP_n(x)+P_{n-1}'(x)-xP_n'(x)=0,\quad n\geqslant 1, \tag{7.5.12}$$

$$P_{n+1}'(x)=xP_n'(x)+(n+1)P_n(x),\quad n\geqslant 0. \tag{7.5.13}$$

另外两个值得注意的关系式是

$$P_{2n}(-x)=P_{2n}(x), \tag{7.5.14}$$

$$P_{2n+1}(-x)=-P_{2n+1}(x). \tag{7.5.15}$$

这两个关系式表示当 n 是偶数时,$P_n(x)$ 是偶函数,而当 n 是奇数时,$P_n(x)$ 是奇函数.

容易证明,勒让德多项式在区间 $[-1,1]$ 上组成一个正交函数系.于是,我们有

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0,\quad n\neq m. \tag{7.5.16}$$

函数 $P_n(x)$ 的模 $\|P_n\|$ 由下式给出:

$$\|P_n\|^2=\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}. \tag{7.5.17}$$

在数学物理中,与勒让德方程(7.5.1)有密切联系的另一个重要方程是连带勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0, \tag{7.5.18}$$

其中 m 是整数.虽然这个方程是与整数 m 的代数符号无关的,但为了方便起见,我们经常把 m 为正值时的解与 m 为负值时的解取得有些不同.

首先考察 $m\geqslant 0$ 的情形. 引入变量变换

$$y=(1-x^2)^{m/2}u,\quad |x|<1,$$

连带勒让德方程就变为

$$(1-x^2)u''-2(m+1)xu'+(n-m)(n+m+1)u=0.$$

但是把勒让德方程(7.5.1)微分 m 次所得到的方程与这个方程是同样的. 因此,方程(7.5.18)的通解为

$$y(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m Y(x)}{\mathrm{d}x^m},\tag{7.5.19}$$

其中

$$Y(x)=C_1\mathrm{P}_n(x)+C_2\mathrm{Q}_n(x)\tag{7.5.20}$$

是方程(7.5.1)的通解.

方程(7.5.18)的一对线性无关的解是由所谓的**第一类连带勒让德函数** $\mathrm{P}_n^m(x)$ 和**第二类连带勒让德函数** $\mathrm{Q}_n^m(x)$ 给出的,它们分别由下面两式定义:

$$\mathrm{P}_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x^m},\tag{7.5.21}$$

$$\mathrm{Q}_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{Q}_n(x)}{\mathrm{d}x^m}.\tag{7.5.22}$$

注意,显然有

$$\mathrm{P}_n^0(x)=\mathrm{P}_n(x),$$
$$\mathrm{Q}_n^0(x)=\mathrm{Q}_n(x),$$

且当 $m>n$ 时, $\mathrm{P}_n^m(x)$ 等于零.

现在, $\mathrm{P}_n^{-m}(x)$ 和 $\mathrm{Q}_n^{-m}(x)$ 可定义为

$$\mathrm{P}_n^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\mathrm{P}_n^m(x),\quad m\geqslant 0,\tag{7.5.23}$$

$$\mathrm{Q}_n^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\mathrm{Q}_n^m(x),\quad m\geqslant 0.\tag{7.5.24}$$

开头几个第一类连带勒让德函数是

$$\mathrm{P}_1^1(x)=(1-x^2)^{1/2},$$
$$\mathrm{P}_2^1(x)=3x(1-x^2)^{1/2},$$
$$\mathrm{P}_2^2(x)=3(1-x^2).$$

第一类连带勒让德函数在区间$[-1,1]$上也组成一个正交函数系,它们的正交性和它们的模可用下面的等式来表示:

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x=\frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\delta_{nk},\tag{7.5.25}$$

其中

$$\delta_{nk}=\begin{cases}1, & 当\ n=k,\\ 0, & 当\ n\neq k.\end{cases}$$

等式(7.5.25)与式(7.5.16)及(7.5.17)是类似的.注意,式(7.5.16)和(7.5.17)是式(7.5.25)当 $m=0$ 时的特殊情形.

最后还要注意,$P_n^m(x)$在区间$[-1,1]$上是处处有限的,而 $Q_n^m(x)$在端点 $x=\pm 1$ 处是无限的.出现勒让德多项式的定解问题将在第九章中加以论述.

7.6 常微分方程边值问题和格林函数

在这一节中,我们要引进格林函数,并用它来表示常微分方程边值问题的解.

首先在区间$[a,b]$上考察二阶线性非齐次自伴常微分方程

$$L[u]=-f(x), \tag{7.6.1}$$

其中 $L=(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)[p(x)(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)]+q(x)$,而方程具有的齐次边界条件是

$$a_1u(a)+a_2u'(a)=0, \tag{7.6.2}$$

$$b_1u(b)+b_2u'(b)=0, \tag{7.6.3}$$

其中常数 a_1 和 a_2,b_1 和 b_2 都不全为零.假设函数 f 和 q 在$[a,b]$上连续,而函数 p 在$[a,b]$上连续可微且不等于零,我们首先用下述有启发性的讨论来引入格林函数.

设一根弦在与时间无关的密度为 $f(x)$且连续分布在弦上的外力作用下,我们把方程(7.6.1)看成是这根弦的平衡方程.此外,设弦受边界条件(7.6.2)和(7.6.3)的约束.

令函数 $G(x,\xi)$表示弦在点 x 处由于单位集中力在点 ξ 上的作用所产生的偏移,那么由于均匀分布外力 $f(\xi)$在单元区间$(\xi,\xi+\mathrm{d}\xi)$上的作用而在点 x 处所产生的偏移为 $G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi$.因为问题是线性的,于是根据叠加原理,弦在点 x 处由于连续分布外力 $f(\xi)$在整个区间$[a,b]$上的作用所产生的偏移应由下列积分来表示:

$$u(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{7.6.4}$$

函数 $G(x,\xi)$称为影响函数或格林函数.显然,$G(x,\xi)$必须在$[a,b]$上有定义且连续,还必须满足给定的边界条件.根据这个定义,$G(x,\xi)$是方程

$$L[u]=-f_\varepsilon(x) \tag{7.6.5}$$

的解当 $\varepsilon\to 0$ 时的极限,其中函数 $f_\varepsilon(x)$在区间 $|x-\xi|<\varepsilon$ 外为零,而在区间

$|x-\xi|<\varepsilon$ 内满足下列关系式：

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1. \tag{7.6.6}$$

因此，对于一切 $x\neq\xi$，$G(x,\xi)$满足齐次方程

$$L[u]=0.$$

当 $x=\xi$ 时，由方程(7.6.5)作积分后得到下列关系式：

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)G'(x,\xi)]\mathrm{d}x+\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}q(x)G(x,\xi)\mathrm{d}x$$
$$=-\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$p(x)G'(x,\xi)\Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}+\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}q(x)G(x,\xi)\mathrm{d}x=-1.$$

如果我们假设 $G(x,\xi)$除去点 $x=\xi$ 外连续可微，那么当 ε 趋于零时对上式取极限，可得

$$\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=\xi-}^{x=\xi+}=-\frac{1}{p(\xi)}. \tag{7.6.7}$$

这个式子表示 $G(x,\xi)$的导数在点 $x=\xi$ 处有跳跃间断性.

上述这个有启发性的讨论使我们可得出格林函数的严格定义.在给定的边界条件下微分式 $L[u]$的格林函数是满足下列条件的函数 $G(x,\xi)$：

(1)在 $a\leqslant x,\xi\leqslant b$ 内，函数 $G(x,\xi)$和它对 x 的一阶及二阶导数在所有 $x\neq\xi$ 处都是连续的；

(2)函数 $G(x,\xi)$在 $a\leqslant x,\xi\leqslant b$ 上连续，而它的一阶导数在点 $x=\xi$ 处有跳跃间断性，其跃度为

$$\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=\xi-}^{x=\xi+}=-\frac{1}{p(\xi)};$$

(3)当 ξ 固定时，$G(x,\xi)$满足给定的边界条件.此外，$G(x,\xi)$除点 $x=\xi$ 外是相应齐次方程

$$L[u]=0$$

的解.

有了这个定义以后，我们就来叙述格林函数的基本定理.

定理 7.6.1　如果函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，那么函数

$$u(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

是下列边值问题的解：

$$\begin{cases} L[u] = -f(x), \\ a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0, \\ b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0. \end{cases}$$

证明 首先,把 $u(x)$对 x 微分,得到

$$u'(x) = \int_a^x G'(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi + G(x,x-)f(x) + \int_x^b G'(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi - G(x,x+)f(x).$$

因为 $G(x,\xi)$在点 ξ 处连续,所以有

$$G(x,x-) = G(x,x+).$$

于是 $u'(x)$可写为

$$u'(x) = \int_a^b G'(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

再把 $u'(x)$对 x 微分,得到

$$\begin{aligned} u''(x) &= \int_a^x G''(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi + G'(x,x-)f(x) \\ &\quad + \int_x^b G''(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi - G'(x,x+)f(x) \\ &= \int_a^b G''(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &\quad + f(x)[G'(x,x-) - G'(x,x+)]. \end{aligned}$$

但我们可把条件(7.6.7)写成下列等价形式(见习题 14):

$$\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{\xi=x-}^{\xi=x+} = \frac{1}{p(x)}, \tag{7.6.8}$$

因此 u''变成

$$\begin{aligned} u''(x) &= \int_a^b G''(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi - f(x)[G'(x,x+) - G'(x,x-)] \\ &= \int_a^b G''(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi - f(x)/p(x). \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} L[u] &= p(x)u''(x) + p'(x)u'(x) + q(x)u(x) \\ &= -f(x) + \int_a^b [p(x)G''(x,\xi) + p'(x)G'(x,\xi) \\ &\quad + q(x)G(x,\xi)]f(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= -f(x) + \int_a^b L[G]f(\xi)\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

因为根据 $G(x,\xi)$的定义,$L[G]=0$,所以有

$$L[u]=-f(x).$$

再由 $G(x,\xi)$的定义,$u(x)$也满足给定的边界条件,所以函数 $u(x)$是边值问题的解.本定理证毕.

为了要在以 $x=\xi$ 为分点的两个子区间上表示格林函数,令

$$G(x,\xi)=\begin{cases}G_1(x,\xi), & 当\ \xi<x\leqslant b,\\ G_2(x,\xi), & 当\ a\leqslant x<\xi,\end{cases} \tag{7.6.9}$$

其中 G_1 和 G_2 都是连续函数.由 $G(x,\xi)$的连续性条件,必有

$$G_1(\xi,\xi)=G_2(\xi,\xi),$$

而由条件(7.6.7),有

$$\frac{dG}{dx}(x,\xi)\Big|_{x=\xi-}^{x=\xi+}=\frac{dG_1}{dx}(x,\xi)\Big|_{x=\xi}-\frac{dG_2}{dx}(x,\xi)\Big|_{x=\xi}$$

$$=-\frac{1}{p(\xi)}. \tag{7.6.10}$$

类似地,如果取 ξ 为变量,我们就可定义

$$G(x,\xi)=\begin{cases}G_1(x,\xi), & 当\ a\leqslant\xi\leqslant x,\\ G_2(x,\xi), & 当\ x<\xi\leqslant b,\end{cases} \tag{7.6.11}$$

其中 G_1 和 G_2 都是连续函数.于是,必有

$$G_1(x,x)=G_2(x,x).$$

由条件(7.6.8),还可推得

$$\frac{dG}{dx}(x,\xi)\Big|_{\xi=x-}^{\xi=x+}=\frac{dG_2}{dx}(x,\xi)\Big|_{\xi=x}-\frac{dG_1}{dx}(x,\xi)\Big|_{\xi=x}$$

$$=\frac{1}{p(x)}. \tag{7.6.12}$$

【例 7.6.1】 考察二点边值问题(未知函数在两个端点处的值是给定的)

$$\begin{cases}u''=-x,\\ u(0)=0,\\ u(1)=0.\end{cases} \tag{7.6.13}$$

对于固定的 ξ,格林函数 $G(x,\xi)$在 $0<x<\xi$,$\xi<x<1$ 内满足相应齐次方程

$$G''=0,$$

并满足边界条件

$$G(0,\xi)=0,$$
$$G(1,\xi)=0.$$

另外,它也满足

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}(x,\xi)\Big|_{x=\xi-}^{x=\xi+}=-\frac{1}{p(\xi)}.$$

现在如果我们选取 $G(x,\xi)$,使得

$$G(x,\xi)=\begin{cases}G_1(x,\xi)=(1-x)\xi, & 当\ \xi\leqslant x\leqslant 1,\\ G_2(x,\xi)=x(1-\xi), & 当\ 0\leqslant x\leqslant \xi,\end{cases}$$

就可看到在区间 $0<x<\xi,\xi<x<1$ 内,有 $G''=0$.还有

$$G_1(1,\xi)=0,$$
$$G_2(0,\xi)=0.$$

此外,

$$G'_1(x,\xi)-G'_2(x,\xi)=-\xi-(1-\xi)=-1,$$

这就是跃度 $-1/p(\xi)$ 的值,因为在这种情况下 $p=1$.因此由定理 7.6.1,记住 ξ 是在 $G(x,\xi)$ 中的变量,边值问题(7.6.13)的解是

$$\begin{aligned}u(x)&=\int_0^x G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_x^1 G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\int_0^x(1-x)\xi^2\mathrm{d}\xi+\int_x^1 x(1-\xi)\xi\mathrm{d}\xi\\&=\frac{x}{6}(1-x^2),\end{aligned}$$

容易直接验证 $u(x)$ 确是边值问题(7.6.13)的解.

7.7 格林函数的构造

从上一节的例题中看到,只要适当选取格林函数,我们就能立即得到边值问题的解.因此,求边值问题的解实际上是要确定这个边值问题的格林函数.我们现在通过构造格林函数的方法,证明满足给定边界条件的 $L[u]$ 的格林函数是存在的.

首先假设满足齐次边界条件(7.6.2)和(7.6.3)的相应齐次方程只有零解,如例 7.6.1.我们构造方程

$$L[u]=0$$

满足边界条件

$$a_1u(a)+a_2u'(a)=0$$

的非零解 $u_1(x)$.容易看出 $C_1u_1(x)$ 是这种解的最一般的形式,其中 C_1 是任意常数.

同样,我们构造方程

$$L[u]=0$$

满足边界条件

$$b_1u(b)+b_2u'(b)=0$$

的非零解 $u_2(x)$，因此 $C_2u_2(x)$ 是这种解的最一般的形式，其中 C_2 是任意常数. 于是 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 在区间 (a,b) 内存在且是线性无关的. 因为，假如它们线性相关，那么 $u_1=Cu_2$，这就是说 u_1 在 $x=a$ 和 $x=b$ 处都满足边界条件. 这与我们假设齐次方程在齐次边界条件下只有零解相矛盾.

因而，格林函数可以取下列形式：

$$G(x,\xi)=\begin{cases}C_1(\xi)u_1(x), & \text{当 } a\leqslant x<\xi,\\ C_2(\xi)u_2(x), & \text{当 } \xi<x\leqslant b.\end{cases}\tag{7.7.1}$$

因为 $G(x,\xi)$ 在点 $x=\xi$ 处连续，所以有

$$C_2(\xi)u_2(\xi)-C_1(\xi)u_1(\xi)=0.\tag{7.7.2}$$

再由 G 的一阶导数在这点的跳跃间断性，要求有

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}(x,\xi)\bigg|_{x=\xi-}^{x=\xi+}=C_2(\xi)u'_2(\xi)-C_1(\xi)u'_1(\xi)=-\frac{1}{p(\xi)}.\tag{7.7.3}$$

对 C_1 和 C_2 解方程组(7.7.2)与(7.7.3)，得到

$$C_1(\xi)=\frac{-u_2(\xi)}{p(\xi)W(u_1,u_2;\xi)},\tag{7.7.4}$$

$$C_2(\xi)=\frac{-u_1(\xi)}{p(\xi)W(u_1,u_2;\xi)},\tag{7.7.5}$$

其中 $W(u_1,u_2;\xi)$ 是解 u_1 和 u_2 的朗斯基行列式，即

$$W(u_1,u_2;\xi)=u_1(\xi)u'_2(\xi)-u_2(\xi)u'_1(\xi).$$

这两个解是线性无关的，所以朗斯基行列式不等于零. 现在证明 $p(\xi)W(u_1,u_2;\xi)$ 是一个不等于零的常数.

因为 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 都是相应齐次方程的解，所以有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pu'_1)+qu_1=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pu'_2)+qu_2=0.$$

以 u_2 乘第一式，以 u_1 乘第二式，并相减，得到

$$u_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pu'_2)-u_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pu'_1)=0.$$

上式可以改写成下列形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(u_1u_2' - u_2u_1')] = 0.$$

积分可得

$$p(u_1u_2' - u_2u_1') = C,$$

其中 C 是常数.

因此格林函数为

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -u_1(x)u_2(\xi)/C, & \text{当 } a \leqslant x \leqslant \xi, \\ -u_2(x)u_1(\xi)/C, & \text{当 } \xi \leqslant x \leqslant b. \end{cases} \tag{7.7.6}$$

于是我们可得到下面的定理.

定理 7.7.1 如果相应齐次边值问题[1]只有零解,那么边值问题(7.6.1)～(7.6.3)的格林函数是存在并且惟一的.

格林函数的惟一性是上面讨论的直接结果(见本章习题 15).

【例 7.7.1】 考察边值问题

$$\begin{cases} u'' + u = -1, \\ u(0) = 0, \\ u\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases} \tag{7.7.7}$$

满足 $L[u] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u') + u = 0$ 及 $u(0) = 0$ 的解是

$$u_1(x) = \sin x, \quad 0 \leqslant x < \xi,$$

而满足 $L[u] = 0$ 及 $u(\pi/2) = 0$ 的解是

$$u_2(x) = \cos x, \quad \xi < x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

于是 u_1 和 u_2 的朗斯基行列式为

$$W(u_1, u_2; \xi) = u_1(\xi)u_2'(\xi) - u_2(\xi)u_1'(\xi) = -1.$$

因为在这种情形下 $p = 1$,所以公式(7.7.6)变为

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \sin x\cos\xi, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \cos x\sin\xi, & \text{当 } \xi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

因此边值问题(7.7.7)的解是

$$u(x) = \int_0^x G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_x^{\pi/2} G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

---

[1] 在齐次边界条件(7.6.2)和(7.6.3)下求方程(7.6.1)的相应齐次方程的解的问题称为相应齐次边值问题.

$$= \int_0^x \cos x \sin\xi \mathrm{d}\xi + \int_x^{\pi/2} \sin x \cos\xi \mathrm{d}\xi$$

$$= -1 + \sin x + \cos x.$$

虽然在公式(7.7.6)中可以看到格林函数 $G(x,\xi)$对 x 和 ξ 是对称的,但下面我们还要单独给出格林函数对称性的证明.

定理 7.7.2　边值问题(7.6.1)～(7.6.3)的格林函数是对称的,即

$$G(x,\xi) = G(\xi,x).$$

证明　考察格林函数

$$G = G(x,\xi),$$
$$H = G(x,\eta),$$

其中 $a<\xi<\eta<b$. 因为 L 是自伴算子,所以容易验证拉格朗日恒等式

$$GL[H] - HL[G] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(H'G - HG')] \tag{7.7.8}$$

是成立的. 注意到 G 和 H 满足

$$L[G] = 0, \quad L[H] = 0,$$

因此,我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(H'G - HG')] = 0.$$

把上式在区间$[a,\xi]$,$[\xi,\eta]$和$[\eta,b]$上积分,得到

$$p(H'G - HG')|_a^\xi + p(H'G - HG')|_\xi^\eta + p(H'G - HG')|_\eta^b = 0.$$

展开上式并重新整理,可得

$$\begin{aligned} p(\xi)G(\xi,\xi)&[H'(\xi-,\eta) - H'(\xi+,\eta)] \\ &+ p(\xi)H(\xi,\eta)[G'(\xi+,\xi) - G'(\xi-,\xi)] \\ &+ p(\eta)G(\eta,\xi)[H'(\eta-,\eta) - H'(\eta+,\eta)] \\ &+ p(\eta)H(\eta,\eta)[G'(\eta+,\xi) - G'(\eta-,\xi)] \\ &+ [p(x)(H'G - HG')]_a^b = 0. \end{aligned} \tag{7.7.9}$$

因为 G 和 H 满足同样的齐次边界条件,所以上式的最后一项为零. 由于 G' 和 H' 除了分别在点 $x=\xi$ 和点 $x=\eta$ 外处处连续,我们就有

$$G'(\eta+,\xi) - G'(\eta-,\xi) = 0,$$
$$H'(\xi-,\eta) - H'(\xi+,\eta) = 0$$

和

$$G'(\xi+,\xi) - G'(\xi-,\xi) = -1/p(\xi),$$
$$H'(\eta+,\eta) - H'(\eta-,\eta) = -1/p(\eta).$$

因此,式(7.7.9)变为

$$G(\eta,\xi)=H(\xi,\eta),$$

根据 H 的定义,由上式即可推得

$$G(\eta,\xi)=G(\xi,\eta).$$

本定理证毕.

7.8 广义格林函数

在上面的讨论中,我们曾经假设相应齐次边值问题只有零解.但是,情况并不一定如此.如果相应齐次边值问题有非零解,那么方程 $L[u]=0$ 满足两个边界条件之一的任何解也将满足另一个边界条件,因此格林函数不存在.

借助下面的定理(略去证明),我们引进广义格林函数,它适合于与有非零解的齐次边值问题相对应的非齐次边值问题.

定理 7.8.1 非齐次边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)u']+q(x)u=-f(x),\\ a_1u(a)+a_2u'(a)=0,\\ b_1u(b)+b_2u'(b)=0,\end{cases}$$

有解

$$u(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi+Au_1(x), \tag{7.8.1}$$

当且仅当

$$\int_a^b f(\xi)u_1(\xi)\mathrm{d}\xi=0, \tag{7.8.2}$$

其中 A 是常数,而 $u_1(x)$是相应齐次边值问题的非零解.函数 $G(x,\xi)$称为广义格林函数,它是方程

$$L[G]=Cu_1(x)u_1(\xi) \tag{7.8.3}$$

除去在点 $x=\xi$ 外的解,并满足齐次边界条件,其中 C 是任意非零常数.此外,$G(x,\xi)$在点 $x=\xi$ 处连续,而 $G'(x,\xi)$除去点 $x=\xi$ 外处处连续.在点 $x=\xi$ 处,$G'(x,\xi)$有跃度为 $-1/p(\xi)$的跳跃.$G(x,\xi)$还满足条件

$$\int_a^b G(x,\xi)u_1(x)\mathrm{d}x=0. \tag{7.8.4}$$

7.9 本征值问题和格林函数

利用格林函数,与本征值问题有关的微分方程可以用一个积分方程来代替.如果这个积分方程的解是确定的,那么本征值问题也可解.

为了看出这一点,我们考察微分方程

$$L[u]+\lambda s(x)u(x)=g(x), \tag{7.9.1}$$

其中 λ 是一参数.假设 $g(x)$是分段连续函数,而 $s(x)$是正的连续函数,并且假定 $L[u]$满足齐次边界条件(7.6.2)和(7.6.3)的格林函数是存在的.那么如果认为 $f(x)$就是 $\lambda s(x)u(x)-g(x)$,由公式(7.6.4)就立即得到下列积分方程:

$$u(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)s(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi-\int_a^b G(x,\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{7.9.2}$$

这个积分方程和微分方程(7.9.1)是等价的.因此求微分方程(7.9.1)的解的问题和求积分方程(7.9.2)的解的问题是等价的.

在上述积分方程中,假如 $s(x)$不是常数,我们就可看到

$$G(x,\xi)s(\xi)\neq G(\xi,x)s(x).$$

因此这个积分方程的核就不是对称的.为了能得到对称核,我们引入新的未知函数

$$v(x)=\sqrt{s(x)}u(x). \tag{7.9.3}$$

把由上式给出的 $u(x)$代入积分方程(7.9.2),可得

$$v(x)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)v(\xi)\mathrm{d}\xi-\int_a^b K(x,\xi)\frac{g(\xi)}{\sqrt{s(\xi)}}\mathrm{d}\xi,$$

其中核

$$K(x,\xi)=\sqrt{s(x)s(\xi)}G(x,\xi)$$

和 $G(x,\xi)$一样具有对称性.

就齐次方程

$$L[u]+\lambda s(x)u(x)=0 \tag{7.9.4}$$

来说,我们有对应的齐次积分方程

$$u(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)s(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{7.9.5}$$

利用变换(7.9.3),积分方程(7.9.5)具有下列形式:

$$v(x)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)v(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{7.9.6}$$

其中 $K(x,\xi)$是一对称核.因此可以应用对称核积分方程的定理(参看柯朗和希尔伯特著的《数学物理方法》,第一卷(有中译本,科学出版社,1958 年)),得到微分方程(7.9.1)的解.

我们现在来叙述一个确定下列非齐次微分方程边值问题解的定理:

定理 7.9.1

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)u'(x)]+[q(x)+\lambda S(x)]u(x)=g(x),\\ a_1u(a)+a_2u'(a)=0,\\ b_1u(b)+b_2u'(b)=0.\end{cases}\tag{7.9.7}$$

设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots$是相应齐次边值问题的本征值,$u_1(x),u_2(x),u_3(x),\cdots$是与之对应的本征函数.

(1)如果 $\lambda\neq\lambda_i$,即 λ 不是本征值,那么边值问题(7.9.7)对任意 $g(x)$有惟一解.

(2)如果 $\lambda=\lambda_i$,那么边值问题(7.9.7)有解,当且仅当

$$\int_a^b s(x)u_i(x)g(x)\mathrm{d}x=0.$$

此外,如果函数 $f(x)$有连续的一阶导数和分段连续的二阶导数,又满足边界条件,那么 $f(x)$可以按这个本征函数系展开为绝对且一致收敛的级数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_ku_k(x),$$

其中

$$c_k=\int_a^b s(x)f(x)u_k(x)\mathrm{d}x\Big/\int_a^b s(x)u_k^2(x)\mathrm{d}x,\quad k=1,2,3,\cdots.$$

这一定理的证明可参看柯朗和希尔伯特著《数学物理方法》.

习　题

1. 确定下列正则施图姆-刘维尔问题的本征值和本征函数:

(a)　$\begin{cases}u''+\lambda u=0,\\ u(0)=0,\quad u(\pi)=0;\end{cases}$

(b)　$\begin{cases}u''+\lambda u=0,\\ u(0)=0,\quad u'(1)=0;\end{cases}$

(c)　$\begin{cases}u''+\lambda u=0,\\ u'(0)=0,\quad u'(\pi)=0;\end{cases}$

(d)　$\begin{cases}u''+\lambda u=0,\\ u(0)+u'(0)=0,\quad u(1)=0.\end{cases}$

2. 求下列周期施图姆-刘维尔问题的本征值和本征函数:

(a) $\begin{cases} u''+\lambda u=0, \\ u(-1)=u(1), \quad u'(-1)=u'(1); \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u''+\lambda u=0, \\ u(0)=u(2\pi), \quad u'(0)=u'(2\pi); \end{cases}$

(c) $\begin{cases} u''+\lambda u=0, \\ u(0)=u(\pi), \quad u'(0)=u'(\pi). \end{cases}$

3. 求下列施图姆-刘维尔问题的本征值与本征函数：

(a) $\begin{cases} u''+u'+(1+\lambda)u=0, \\ u(0)=0, \quad u(1)=0; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u''+2u'+(1+\lambda)u=0, \\ u(0)=0, \quad u'(1)=0; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} u''-3u'+3(1+\lambda)u=0, \\ u'(0)=0, \quad u'(\pi)=0. \end{cases}$

4. 证明如果 $v(x)$和 $w(x)$是施图姆-刘维尔问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)u'] + [q(x)+\lambda s(x)]u = 0, \\ a_1u(a)+a_2u(b)+a_3u'(a)+a_4u'(b) = 0, \\ b_1u(a)+b_2u(b)+b_3u'(a)+b_4u'(b) = 0, \end{cases}$$

的两个线性无关的解，那么 v 和 w 在区间$[a,b]$上带权函数 $s(x)$正交.

5. 求下列正则施图姆-刘维尔问题的本征值和本征函数：

(a) $\begin{cases} x^2u''+3xu'+\lambda u=0, \quad 1<x<\mathrm{e}, \\ u(1)=0, \quad u(\mathrm{e})=0; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(2+x)^2u']+\lambda u=0, \quad -1<x<1, \\ u(-1)=0, \quad u(1)=0; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (1+x)^2u''+2(1+x)u'+3\lambda u=0, \quad 0<x<1, \\ u(0)=0, \quad u(1)=0. \end{cases}$

6. 确定下列奇异施图姆-刘维尔问题的所有本征值和本征函数：

(a) $\begin{cases} x^2u''+xu'+\lambda u=0, \quad 0<x<1, \\ u(1)=0, \quad \lim\limits_{x\to0+}|u(x)|<\infty, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u''-\lambda u=0, \quad 0<x<\infty, \\ u(0)=0, \quad \lim\limits_{x\to\infty}|u(x)|<\infty. \end{cases}$

7. (a)证明 $\lambda_n=n(n+1)$是与勒让德方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)u'] + \lambda u = 0, \quad -1<x<1,$$

满足有界性条件

$$\lim_{x\to\pm1}|u(x)|<\infty$$

的本征函数 $\mathrm{P}_n(x)$对应的本征值；

(b)证明 $\mathrm{J}_n(\lambda x)$是贝塞尔方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xu'] - \left(\frac{n^2}{x} - \lambda x\right)u = 0, \quad 0 < x < 1,$$

满足条件

$$u(1) = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} |u(x)| < \infty$$

的本征函数,其中 n 是固定的实数.

8.(a) 把函数

$$f(x) = \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

按照下列施图姆-刘维尔问题:

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \\ u(0) = 0, \quad u(\pi) + u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

的本征函数系展开;

(b) 求函数

$$f(x) = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

按下列施图姆-刘维尔问题:

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \\ u'(0) = 0, \quad u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

的本征函数系展开的级数展开式.

9. 求下列边值问题的格林函数:

(a) $$\begin{cases} L[u] = u'' = 0, \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 0; \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} L[u] = xu'' + u' = 0, \\ u(1) = 0, \quad \lim_{x \to 0} |u(x)| < \infty; \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} L[u] = (1 - x^2)u'' - 2xu' = 0, \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 0; \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} L[u] = u'' + a^2 u = 0 \quad (a \text{ 是常数}), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

10. 解下列非齐次方程边值问题:

(a) $$\begin{cases} u'' + u = 1, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0; \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} u'' + 4u = \mathrm{e}^x, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 0; \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} u'' = -\ln x, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \quad u(1) + 2u'(1) = 0. \end{cases}$$

11. 解下列初值问题:

(a) $$\begin{cases} u'' - u = x, \quad x > 1, \\ u(1) = 1, \quad u'(1) = 0; \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x^2 u'' + xu' + u = \sin x, \quad x > 0, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 0. \end{cases}$$

12. 求下列边值问题的格林函数：

(a)
$$\begin{cases} u''=-f(x), \\ u(0)=0, \quad u(1)-u'(1)=0; \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} (1-x^2)u''-2xu'=-f(x), \\ \lim\limits_{x\to\pm 1}|u(x)|<\infty; \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} xu''+u'=-f(x), \\ u(1)=0, \quad \lim\limits_{x\to 0+}|u(x)|<\infty. \end{cases}$$

13. 把下列微分方程问题化为等价的积分方程：

(a)
$$\begin{cases} u''+\lambda u=0, \\ u(0)=0, \quad u(1)=0; \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} u''+\lambda u=0, \\ u(0)=1, \quad u'(0)=0; \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xu']+\left(-\dfrac{1}{x}+\lambda x\right)u=0, \\ u(0)=0, \quad u(1)=0. \end{cases}$$

14. 证明条件

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}(x,\xi)\Bigg|_{\xi=x-}^{\xi=x+}=\frac{1}{p(x)}$$

和条件

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}(x,\xi)\Bigg|_{x=\xi-}^{x=\xi+}=-\frac{1}{p(\xi)}$$

是等价的，其中 $G(x,\xi)$是格林函数.

（提示：如果我们交换变量 x 和ξ，那么区间(a,b)的对应部分也必须改变，见图 7.4.）

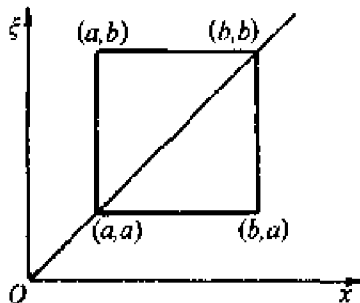


图 7.4

15. 证明微分式

$$L[u]=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)[p(x)u']+q(x)$$

的格林函数是惟一的.

（提示：设存在两个格林函数 $G(x,\xi)$和 $H(x,\xi)$，对固定的 ξ，令 $K(x,\xi)=G(x,\xi)-H(x,\xi)$.）

16. 如果函数 $q(x)$和 $s(x)$都在区间$[a,b]$上连续，而函数 $p(x)$在$[a,b]$上二次连续可微，那么下列四阶施图姆-刘维尔问题的固有函数系在$[a,b]$上带权函数 $s(x)$正交：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[p(x)u'']+[q(x)+\lambda s(x)]u=0, \\ \left[a_1u+a_2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pu'')\right]_{x=a}=0, \left[b_1u+b_2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pu'')\right]_{x=b}=0, \\ [c_1u'+c_2pu'']_{x=a}=0, \quad [d_1u'+d_2pu'']_{x=b}=0, \end{cases}$$

其中 $a_1^2+a_2^2\neq 0, b_1^2+b_2^2\neq 0, c_1^2+c_2^2\neq 0, d_1^2+d_2^2\neq 0$.

17. 如果下列施图姆-刘维尔问题：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(ru') + \lambda u = 0, \quad 0 < r < a, \\ c_1 u(a) + c_2 u'(a) = 0, \\ \lim\limits_{r\to 0+} u(r) < \infty \end{cases}$$

的本征函数系满足条件

$$\lim_{r\to 0+} ru'(r) = 0,$$

证明当 c_1 和 c_2 都是实数时，所有本征值也都是实数.

第八章　椭圆型方程边值问题

8.1　椭圆型方程边值问题

在前面几章中，我们已经讨论了初值问题和初边值问题．在这一章中，我们将研究边值问题．在数学上，边值问题是要找出一个满足已知偏微分方程和特定边界条件的函数．而从物理上说，这个问题是与时间无关的，它只含有空间坐标．正像初值问题常常是与双曲型偏微分方程相联系的一样，边值问题是与椭圆型偏微分方程相联系的．但和解初值问题有很大不同，解边值问题比较困难．这是由于物理上要求边值问题的解必须在全部定义域上获得，而初值问题在局部范围内的解，比如说在很短时间内的解，还是有物理意义的．

本书所讨论的 n 个自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二阶椭圆型偏微分方程的形式是

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} \equiv \nabla^2 u = F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u_{x_1},u_{x_2},\cdots,u_{x_n}). \quad (8.1.1)$$

一些著名的椭圆型方程是：

A．拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = 0; \quad (8.1.2)$$

B．泊松方程

$$\nabla^2 u = g(x), \quad (8.1.3)$$

其中

$$g(x) \equiv g(x_1,x_2,\cdots,x_n);$$

C．亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0, \quad (8.1.4)$$

其中 λ 是正的常数；

D．定态薛定谔方程

$$\nabla^2 u + [\lambda - q(x)]u = 0. \quad (8.1.5)$$

在这一章中，我们不讨论一般的椭圆型偏微分方程．我们将介绍二维拉普拉斯方程的一些最简单的边值问题．

让我们首先定义调和函数．如果一个函数与它的一阶和二阶导数都在区域 D 内连续，而且它在 D 内满足拉普拉斯方程，那么这个函数就称为在区域

D 内的调和函数.

这里可以注意到,因为拉普拉斯方程是线性齐次方程,所以调和函数的线性组合也是调和函数.

1. 第一边值问题

狄利克莱问题:求一个函数 $u(x,y)$,它在 D 内是调和函数,而且满足

$$u = f(s), \quad 在 B 上, \tag{8.1.6}$$

其中 $f(s)$是在区域 D 的边界 B 上给定的连续函数,D 是分段光滑的简单闭曲线 B 的内部区域.

为了更清楚地描述这个问题,在物理上我们可以把狄利克莱问题的解 u 解释为:在一不含热源和热汇的物体内的稳恒状态的温度分布,而在所有边界点上具有给定的温度.

2. 第二边值问题

诺依曼问题:求一个函数 $u(x,y)$,它在 D 内是调和函数,而且满足

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(s), \quad 在 B 上, \tag{8.1.7}$$

其中

$$\int_B f(s)\mathrm{d}s = 0. \tag{8.1.8}$$

这里符号$\partial u/\partial n$ 表示 u 在边界 B 上的外法向导数,而后一个条件(8.1.8)称为相容性条件,因为它是方程$\nabla^2 u=0$ 和条件(8.1.7)的一个结果.这时解 u 可以解释为:当经过边界的热流量给定时,在一不含热源和热汇的物体内的稳恒状态的温度分布.

在这种情况下,相容性条件在物理上可以解释为:流过边界的总的热流量必须是零.

3. 第三边值问题

混杂问题:求一个函数 $u(x,y)$,它在 D 内是调和函数,而且满足

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(s)u = 0, \quad 在 B 上, \tag{8.1.9}$$

其中 $h(s)\geqslant 0$,且 $h(s)\neq 0$.在这个问题中,解 u 可以解释为:在一不含热源和热汇的物体内的稳恒状态的温度分布,而热量从边界自由散发到温度为零度的周围介质中去.

4. 第四边值问题

劳平问题:求一个函数 $u(x,y)$,它在 D 内是调和函数,而且在边界 B 的不同的部分上,满足不同类型的边界条件.含有这种边界条件的例子是

$$\begin{cases} u = f_1(s), & \text{在 } B_1 \text{ 上}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = f_2(s), & \text{在 } B_2 \text{ 上}, \end{cases} \tag{8.1.10}$$

其中 $B = B_1 \cup B_2$.

边值问题 1～4 称为内边值问题.这种内边值问题和另一种外边值问题[①]在下列两个方面是不同的:

(1)无穷远可看作是外问题的边界的一部分,但无穷远边界不同于普通边界.

(2)在无穷远处,外问题的解必须满足一个附加条件,即解在无穷远处要保持有界.

8.2　最大值和最小值原理

在我们证明二维拉普拉斯方程的狄利克莱内问题的解的惟一性和稳定性定理前,我们首先证明最大值和最小值原理.

定理 8.2.1(最大值原理)　假定函数 $u(x,y)$在有界区域 D 内是调和的,并且在 $\boldsymbol{D} = D \cup B$ 上是连续的,那么 u 在D 的边界B 上取得其最大值.

在物理上,我们可以把这个原理解释为:既没有热源也没有热汇的物体的温度在物体的表面上取得最大(或最小)值;此外,不含有任何自由电荷的区域上的静电势也在区域的边界上取得最大(或最小)值.

证明　设 u 在B 上的最大值是M.让我们现在假定 u 在$\boldsymbol{D}$ 上的最大值不在B 的任何点上取得,那么 u 必在D 内的某一点$P_0(x_0,y_0)$上取得最大值.如果 $M_0 = u(x_0,y_0)$表示 u 在D 内的最大值,那么 M_0 必须也是 u 在$\boldsymbol{D}$ 上的最大值.

考察函数

$$v(x,y) = u(x,y) + \frac{M_0 - M}{8R^2}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2], \tag{8.2.1}$$

其中点 $P(x,y)$在 D 上,而 R 是包含D 的一圆的半径.注意到

$$v(x_0,y_0) = u(x_0,y_0) = M_0,$$

且在 B 上有

---

① 求一个函数 $u(x,y)$,它在 $D \cup B$ 外是调和函数,而在边界 B 上满足给定的条件,这样的定解问题称为拉普拉斯方程的外边值问题.

$$v(x,y) \leqslant M + (M_0 - M)/2 = \frac{1}{2}(M + M_0) < M_0.$$

于是 $v(x,y)$像 $u(x,y)$一样,必在 D 内某一点(x_1,y_1)上取得最大值.在这点上,由 v 的定义可得

$$v_{xx} + v_{yy} = u_{xx} + u_{yy} + \frac{(M_0 - M)}{2R^2} = \frac{(M_0 - M)}{2R^2} > 0. \quad (8.2.2)$$

但因为 v 在点(x_1,y_1)上取得最大值,则在这点上应有

$$v_{xx} \leqslant 0, \quad v_{yy} \leqslant 0.$$

因此在这点上,可得

$$v_{xx} + v_{yy} \leqslant 0,$$

上式与式(8.2.2)矛盾.因此 u 的最大值必须在 B 上取得.本定理证毕.

定理 8.2.2 (最小值原理) 如果函数 $u(x,y)$在有界区域 D 内是调和的,并且在 $\boldsymbol{D} = D \cup B$ 上是连续的,那么 u 在 D 的边界 B 上取得其最小值.

证明 把上面的定理应用到调和函数 $-u(x,y)$上去,立即可得到证明.本定理证毕.

上面两个定理对函数 u = 常数是显然成立的.因为这时 u 是调和函数,且它在区域 D 内和在边界 B 上取得相同的值.

8.3 惟一性和稳定性定理

定理 8.3.1 (惟一性定理) 如果狄利克莱问题的解存在,那么解是惟一的.

证明 设 $u_1(x,y)$和 $u_2(x,y)$是狄利克莱问题的两个解,那么 u_1 和 u_2 满足

$$\nabla^2 u_1 = 0, \quad \nabla^2 u_2 = 0, \quad 在 D 内,$$

$$u_1 = f, \quad u_2 = f, \quad 在 B 上.$$

因为 u_1 和 u_2 在 D 内都是调和的,所以 $u_1 - u_2$ 在 D 内也是调和的.但

$$u_1 - u_2 = 0, \quad 在 B 上,$$

根据最大值和最小值原理,在 D 的所有内点上有

$$u_1 - u_2 \equiv 0.$$

于是我们有

$$u_1 \equiv u_2.$$

因此解是惟一的.本定理证毕.

定理 8.3.2 (稳定性定理) 狄利克莱问题的解连续依赖于边界条件.

证明　设 u_1 和 u_2 是下面两个狄利克莱问题的解：

$$\begin{cases}\nabla^2 u_1 = 0, & \text{在 } D \text{ 内},\\ u_1 = f_1, & \text{在 } B \text{ 上}\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\nabla^2 u_2 = 0, & \text{在 } D \text{ 内},\\ u_2 = f_2, & \text{在 } B \text{ 上}.\end{cases}$$

如果 $v = u_1 - u_2$，那么 v 满足

$$\begin{cases}\nabla^2 v = 0, & \text{在 } D \text{ 内},\\ v = f_1 - f_2, & \text{在 } B \text{ 上}.\end{cases}$$

根据最大值和最小值原理，$f_1 - f_2$ 在 B 上取得 v 的最大值和最小值. 因此如果 $|f_1 - f_2| < \varepsilon$，那么

$$-\varepsilon < v_{\min} \leqslant v \leqslant v_{\max} < \varepsilon, \quad \text{在 } B \text{ 上}.$$

于是在 D 的任意内点上，我们有

$$-\varepsilon < v_{\min} \leqslant v \leqslant v_{\max} < \varepsilon.$$

所以在 D 内 $|v| < \varepsilon$. 因此

$$|u_1 - u_2| < \varepsilon.$$

定理 8.3.3　设 $\{u_n\}$ 是在 D 内调和并且在 $\boldsymbol{D}$ 上连续的一个函数序列，又设 f_i 是 u_i 在 B 上的值. 如果 $\{u_n\}$ 在 B 上一致收敛，那么 $\{u_n\}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 上也一致收敛.

证明　根据假设，$\{f_n\}$ 在 B 上一致收敛. 于是对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 $n, m > N$ 时，在 B 上处处有

$$|f_n - f_m| < \varepsilon.$$

于是由稳定性定理可知，对所有 $n, m > N$ 时，在 D 内处处有

$$|u_n - u_m| < \varepsilon.$$

因此定理得证.

8.4　圆的狄利克莱问题

1. 内问题

我们现在将证明圆的狄利克莱问题的解的存在性.

这个狄利克莱问题是

$$\begin{cases}\nabla^2 u = u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & \text{当 } r < a, & (8.4.1)\\ u(a, \theta) = f(\theta). & & (8.4.2)\end{cases}$$

用分离变量法，我们找方程的下列形式的解：

$$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta).$$

把这样的解代入方程(8.4.1)，得

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\lambda.$$

因此，就得到下面两个常微分方程

$$r^2R''+rR'-\lambda R=0, \tag{8.4.3}$$

$$\Theta''+\lambda\Theta=0. \tag{8.4.4}$$

由于函数 u 的单值性，要求 $\Theta(\theta)$具有周期条件 $\Theta(0)=\Theta(2\pi)$和 $\Theta'(0)=\Theta'(2\pi)$，因此当 $\lambda<0$ 时得不到非零解. 当 $\lambda=0$ 时，我们有

$$u(r,\theta)=(A+B\lg r)(C\theta+D).$$

因为当 $r\to 0+$ 时(注意点 $r=0$ 是方程(8.4.1)的奇点)，$\lg r\to-\infty$，为了使 u 在 $r=0$ 处是有限的，必须 $B=0$。为了使 u 是以 2π 为周期的函数，还必须有 $C=0$. 因此当 $\lambda=0$ 时，解 $u_0(r,\theta)=$常数。当 $\lambda>0$ 时，方程(8.4.4)的解是

$$\Theta(\theta)=A\cos\sqrt{\lambda}\theta+B\sin\sqrt{\lambda}\theta.$$

由周期条件可推出

$$\sqrt{\lambda}=n\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

方程(8.4.3)是欧拉方程，所以它的通解是

$$R(r)=Cr^n+Dr^{-n}.$$

因为当 $r\to 0$ 时，$r^{-n}\to\infty$，为了使 u 在 $r=0$ 处是有限的，必须 $D=0$. 于是就得到方程(8.4.1)的一系列特解

$$u_n(r,\theta)=C_nr^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

因此方程(8.4.1)的解可以写成下列形式：

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta), \tag{8.4.5}$$

其中常数项 $u_0/2$ 表示当 $\lambda=0$ 时的解，且 a_n 和b_n 都是常数. 令 $\rho=r/a$，我们有

$$u(\rho,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta). \tag{8.4.6}$$

我们先形式上决定这些待定常数 a_0,a_n 和 b_n. 为了使 u 满足边界条件(8.4.2)，应有

$$u(1,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)=f(\theta).$$

因此 a_n 和b_n 就是$f(\theta)$的傅里叶系数，即

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta \mathrm{d}\theta \quad (n = 0,1,2,\cdots), \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta \mathrm{d}\theta \quad (n = 1,2,3,\cdots). \end{cases} \tag{8.4.7}$$

下面我们要证明,当 $f(\theta)$是连续函数时,形式解 $u(\rho,\theta)$在 $0\leqslant\rho<1$ 内是调和的,并且满足边界条件.

首先由于假设函数 $f(\theta)$是连续的,所以数列 a_n 和 b_n 都是有界的,即存在常数 $M>0$,使

$$|a_0| < M,\ |a_n| < M,\ |b_n| < M \quad (n = 1,2,3,\cdots).$$

于是如果考察由下式定义的函数序列$\{u_n\}$:

$$u_n(\rho,\theta) = \rho^n(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta), \tag{8.4.8}$$

我们有

$$|u_n| < 2\rho_0^n M, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0 < 1.$$

因此在单位圆内的任何闭圆区域上,级数(8.4.6)一致收敛.

其次把 u_n 对 r 微分,那么当 $0\leqslant\rho\leqslant\rho_0<1$ 时,有

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial r}\right| = \left|\frac{n}{a}\rho^{n-1}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)\right|$$

$$< 2\frac{n}{a}\rho_0^{n-1}M.$$

于是可见把级数(8.4.6)对 r 逐项微分所得到的级数在上述闭圆区域上也一致收敛.同样,我们可以证明把级数(8.4.6)对 r 和 θ 逐项微分两次所得到的级数,当 $0\leqslant\rho\leqslant\rho_0<1$ 时都是一致收敛的.因为级数(8.4.6)的每一项都是调和函数,又因为上面的级数都是一致收敛的,因而有

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^{n-2}}{a^2}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)[n(n-1) + n - n^2] \\ &= 0, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0 < 1. \end{aligned}$$

所以函数 $u(\rho,\theta)$在区域 $0\leqslant\rho<1$ 的任一内点上是调和的.现在剩下的是要证明 u 在圆周上取边值 $f(\theta)$.

把傅里叶系数 a_n 与 b_n 代入式(8.4.6),由于级数的一致收敛性,所以求和与求积分的次序是可以交换的,于是可得

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n$$

$$\cdot\int_0^{2\pi} f(\tau)[\cos n\tau\cos n\theta+\sin n\tau\sin n\theta]\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n(\theta-\tau)\Big]f(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{8.4.9}$$

当 $0\leqslant\rho<1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}1+2\sum_{n=1}^{\infty}[\rho^n\cos n(\theta-\tau)]&=1+\sum_{n=1}^{\infty}[\rho^n e^{in(\theta-\tau)}+\rho^n e^{-in(\theta-\tau)}]\\&=1+\frac{\rho e^{i(\theta-\tau)}}{1-\rho e^{i(\theta-\tau)}}+\frac{\rho e^{-i(\theta-\tau)}}{1-\rho e^{-i(\theta-\tau)}}\\&=\frac{1-\rho^2}{1-\rho e^{i(\theta-\tau)}-\rho e^{-i(\theta-\tau)}+\rho^2}\\&=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}.\end{aligned}$$

因此，得

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}f(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{8.4.10}$$

这个公式称为泊松积分公式，而等式右边的积分称为圆的泊松积分.

现在如果 $f(\theta)\equiv1$，那么根据级数(8.4.9)，当 $0\leqslant\rho<1$ 时，$u(\rho,\theta)\equiv1$. 于是由式(8.4.10)，得

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}\mathrm{d}\tau.$$

当 $0\leqslant\rho<1$ 时，由此可得

$$f(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}f(\theta)\mathrm{d}\tau.$$

因此，我们有

$$u(\rho,\theta)-f(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-\rho^2)[f(\tau)-f(\theta)]}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}\mathrm{d}\tau. \tag{8.4.11}$$

因为 $f(\theta)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上是一致连续的，所以对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta(\varepsilon)$，使得当 $|\theta-\tau|<\delta$ 时，可推出 $|f(\theta)-f(\tau)|<\varepsilon$. 如果 $|\theta-\tau|\geqslant\delta$，只要 $\theta-\tau\neq2n\pi(n=0,1,2,\cdots)$，那么

$$\lim_{\rho\to1-}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}=0.$$

换句话说，存在 ρ_0，使得如果 $|\theta-\tau|\geqslant\delta$，那么当 $0\leqslant\rho\leqslant\rho_0<1$ 时，有

$$\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}<\varepsilon.$$

因此由式(8.4.10),得

$$
\begin{aligned}
|u(\rho,\theta)-f(\theta)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|\geqslant\delta}\frac{(1-\rho^2)|f(\theta)-f(\tau)|}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}\mathrm{d}\tau \\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|<\delta}\frac{(1-\rho^2)|f(\theta)-f(\tau)|}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}2\pi\varepsilon[2\max_{0\leqslant\theta\leqslant2\pi}|f(\theta)|]+\frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot2\pi \\
&\leqslant \varepsilon[1+2\max_{0\leqslant\theta\leqslant2\pi}|f(\theta)|],
\end{aligned}
$$

于是推出

$$\lim_{\rho\to1-}u(\rho,\theta)=f(\theta)$$

对 θ 是一致成立的.所以我们便得到下面的定理.

定理 8.4.1 (圆的狄利克莱问题)　存在且只存在一个调和函数 $u(r,\theta)$ 取给定的连续边值 $f(\theta)$.这个函数为

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-\tau)+r^2}f(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (8.4.12)$$

或

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta), \qquad (8.4.13)$$

其中 a_n 和 b_n 是函数 $f(\theta)$ 的傅里叶系数.

当 $\rho=0$ 时,泊松积分公式(8.4.10)变为

$$u(0,\theta)\equiv u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (8.4.14)$$

这个结果可以表示为下面的定理.

定理 8.4.2 (中值定理)　如果函数 u 在某一圆内是调和的,那么 u 在圆心的值等于 u 在圆周上的值的平均值.

2. 外问题

像上一段一样,圆的狄利克莱外问题也不难解决.对于外问题来说,当 $r\to\infty$ 时,u 必须是有界的.这个问题的解是

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta). \qquad (8.4.15)$$

利用边界条件 $u(a,\theta)=f(\theta)$,得到

$$f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta).$$

因此,得到

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos n\tau \mathrm{d}\tau \quad (n = 0,1,2,\cdots), \tag{8.4.16}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin n\tau \mathrm{d}\tau \quad (n = 1,2,3,\cdots). \tag{8.4.17}$$

把上面的 a_n 和 b_n 代入式(8.4.15),可得

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \cos n(\theta - \tau)\right] f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

与式(8.4.9)比较,可看到圆的狄利克莱外问题和内问题的解的惟一差别是以 ρ^{-n} 代替 ρ^n. 所以当 $\rho>1$ 时,解的最后结果是

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - 1}{1 - 2\rho\cos(\theta - \tau) + \rho^2} f(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{8.4.18}$$

8.5 圆环的狄利克莱问题

圆的狄利克莱问题可以自然推广为圆环的狄利克莱问题,即

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, \quad 当 r_2 < r < r_1, & (8.5.1) \\ u(r_1,\theta) = f(\theta), & (8.5.2) \\ u(r_2,\theta) = g(\theta). & (8.5.3) \end{cases}$$

另外,由于 $u(r,\theta)$ 必须满足周期条件,因此 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 也必须是以 2π 为周期的函数.

和圆的狄利克莱问题一样,先求方程(8.5.1)的所有可以分离变量的非零特解. 当 $\lambda=0$ 时,得到

$$u(r,\theta) = (A + B\lg r)(C\theta + D).$$

由 u 的周期条件,要求 $C=0$. 于是 $u(r,\theta)$ 变为

$$u_0(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0}{2}\lg r,$$

其中 $a_0=2AD, b_0=2BD$.

当 $\lambda>0$ 时,可以推出

$$\sqrt{\lambda} = n \quad (n = 1,2,3,\cdots),$$

于是得到的解是

$$u_n(r,\theta) = (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta).$$

因此,方程(8.5.1)的解是

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}(a_0 + b_0\lg r) + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n r^n + b_n r^{-n})\cos n\theta$$

$$+(c_n r^n + d_n r^{-n})\sin n\theta],\tag{8.5.4}$$

其中 a_n, b_n, c_n 和 d_n 都是常数.

利用边界条件(8.5.2)和(8.5.3),得到上面这些系数为

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \lg r_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\tau)\mathrm{d}\tau, \\ a_n r_1^n + b_n r_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos n\tau \mathrm{d}\tau, \\ c_n r_1^n + d_n r_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin n\tau \mathrm{d}\tau \end{cases}\tag{8.5.5}$$

和

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \lg r_2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\tau)\mathrm{d}\tau, \\ a_n r_2^n + b_n r_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\tau)\cos n\tau \mathrm{d}\tau, \\ c_n r_2^n + d_n r_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\tau)\sin n\tau \mathrm{d}\tau. \end{cases}\tag{8.5.6}$$

于是可以确定常数 $a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n (n=1,2,3,\cdots)$. 因此圆环的狄利克莱问题的解由(8.5.4)～(8.5.6)各式给出.

8.6　圆的诺依曼问题

1. 内问题

考察下列诺依曼内问题:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, \quad r < R, & (8.6.1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial r} = f(\theta), \quad r = R. & (8.6.2) \end{cases}$$

在确定这个问题的解之前,我们要建立诺依曼内问题有解的必要条件.

在格林第二公式

$$\iint\limits_D (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)\mathrm{d}S = \int_B \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s\tag{8.6.3}$$

中,取 $v=1$,使得在 D 内$\nabla^2 v = 0$,且在 B 上$\dfrac{\partial v}{\partial n}=0$. 因此得到

$$\iint\limits_D \nabla^2 u \mathrm{d}S = \int_B \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s.\tag{8.6.4}$$

把式(8.6.1)和(8.6.2)代入式(8.6.4),得

$$\int_B f\mathrm{d}s = 0, \tag{8.6.5}$$

上式也可写成下列形式：

$$R\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta = 0. \tag{8.6.6}$$

像圆的狄利克莱内问题一样，拉普拉斯方程(8.6.1)的解是

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta). \tag{8.6.7}$$

把上式对 r 微分并利用边界条件(8.6.2)，得到

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} kR^{k-1}(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta) = f(\theta). \tag{8.6.8}$$

因此系数 a_k 和 b_k 为

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{k\pi R^{k-1}}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos k\tau\mathrm{d}\tau \quad (k = 1,2,3,\cdots), \\ b_k = \dfrac{1}{k\pi R^{k-1}}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin k\tau\mathrm{d}\tau \quad (k = 1,2,3,\cdots). \end{cases} \tag{8.6.9}$$

注意，由相容性条件(8.6.6)，因此

$$\int_0^{2\pi} f(\tau)\mathrm{d}\tau = 0,$$

所以函数 $f(\theta)$只有在上式成立时，才可能展开为级数(8.6.8).

把 a_k 和 b_k 代入式(8.6.7)，得到

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \frac{R}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{r}{R}\right)^k\cos k(\theta-\tau)\right]f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

利用恒等式

$$-\frac{1}{2}\lg[1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\tau)] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\rho^k\cos k(\theta-\tau),$$

其中 $\rho = r/R$，那么解取下列形式：

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} - \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg[R^2 - 2rR\cos(\theta-\tau) + r^2]f(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{8.6.10}$$

这里根据式(8.6.6)，我们已消去对数符号后面方括号中的常数因子$\frac{1}{R^2}$.

2. 外问题

考察下列诺依曼外问题：

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, \quad r > R, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = -\dfrac{\partial u}{\partial r} = f(\theta), \quad r = R. \end{cases} \tag{8.6.11}$$

同上面一样，我们不难得到这个圆的诺依曼外问题的解是

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg[R^2-2rR\cos(\theta-\tau)+r^2]f(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{8.6.12}$$

8.7　矩形的狄利克莱问题

首先考察定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2u=u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b, & (8.7.1)\\ u(x,0)=f(x), & (8.7.2)\\ u(x,b)=0, & (8.7.3)\\ u(0,y)=0, & (8.7.4)\\ u(a,y)=0. & (8.7.5)\end{cases}$$

我们找方程(8.7.1)的下列形式的解：

$$u(x,y)=X(x)Y(y).$$

把 $u(x,y)$代入拉普拉斯方程，得到下面两个常微分方程：

$$X''-\lambda X=0, \tag{8.7.6}$$

$$Y''+\lambda Y=0, \tag{8.7.7}$$

其中 λ 是分离常数. 因为在 $x=0$ 和 $x=a$ 处的边界条件都是齐次的，为了得到本征值问题的非零解，我们选取 $\lambda=-\alpha^2$，其中 $\alpha>0$.

容易求得下列本征值问题：

$$\begin{cases}X''+\alpha^2X=0,\\ X(0)=X(a)=0\end{cases}$$

的本征值是

$$\alpha=\frac{n\pi}{a}\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

而对应的本征函数是 $\sin(n\pi x/a)$. 因此，有

$$X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

方程(8.7.7)的解是

$$Y(y)=C\cosh\alpha y+D\sinh\alpha y,$$

但我们可把它写成下列形式：

$$Y(y)=E\sinh\alpha(y+F),$$

其中 $E=(D^2-C^2)^{1/2}$，$F=1/\alpha\tanh^{-1}(C/D)$. 利用剩下的齐次边界条件

$$u(x,b)=X(x)Y(b)=0,$$

可得

$$Y(b)=E\sinh\alpha(b+F)=0.$$

因此对于非零解,有

$$F=-b,\quad E\neq 0.$$

于是我们有

$$Y_n(y)=E_n\sinh\frac{n\pi}{a}(y-b).$$

由于方程(8.7.1)和边界条件(8.7.3)~(8.7.5)都是线性齐次的,所以利用叠加原理得解

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi}{a}(y-b),$$

其中 $a_n=B_nE_n$. 现在利用非齐次边界条件,得

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sinh\left(\frac{-n\pi b}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

这是一个傅里叶正弦级数,因此

$$a_n=\frac{-2}{a\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x.$$

于是形式解为

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^*\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a},\tag{8.7.8}$$

其中

$$a_n^*=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x.$$

为了证明形式解(8.7.8)确是定解问题(8.7.1)~(8.7.5)的解,首先注意到

$$\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}=\mathrm{e}^{-n\pi y/a}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{2n\pi}{a}(b-y)}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{2n\pi b}{a}}}\right]$$

$$\leqslant C^*\mathrm{e}^{-n\pi y/a},$$

其中 C^* 是常数,设函数 $f(x)$ 是有界的,我们有

$$|a_n^*|\leqslant\frac{2}{a}\int_0^a|f(x)|\mathrm{d}x=C_2.$$

于是当 $y \geqslant y_0 > 0$ 时，级数 $u(x,y)$ 以收敛的常数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} M e^{-n\pi y_0/a} \quad (M = \text{常数})$$

为其优级数，因此级数 $u(x,y)$ 当 $0 \leqslant x \leqslant a, y \geqslant y_0 > 0$ 时一致收敛. 所以 $u(x,y)$ 在这个区域上是连续的，且满足边值 $u(0,y) = u(a,y) = u(x,b) = 0$.

现在把 u 对 x 微分两次，得到

$$u_{xx}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} - a_n^* \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \frac{\sinh \frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a},$$

把 u 对 y 微分两次，得

$$u_{yy}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \frac{\sinh \frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

显然，u_{xx} 和 u_{yy} 的级数都以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} M^* n^2 e^{-n\pi y_0/a} \quad (M^* = \text{常数})$$

为其优级数，因此对任意 $0 < y_0 < b$，u_{xx} 和 u_{yy} 的级数当 $0 \leqslant x \leqslant a, y_0 \leqslant y \leqslant b$ 时都一致收敛. 由此可见 u_{xx} 和 u_{yy} 都存在，且 u 满足拉普拉斯方程.

现在剩下要证明 $u(x,0) = f(x)$. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上连续，且 $f'(x)$ 在 $[0,a]$ 上分段连续. 另外如果 $f(0) = f(a) = 0$，那么函数 $f(x)$ 的傅里叶级数一致收敛. 在 $u(x,y)$ 的级数中取 $y = 0$，得到

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

因为 $u(x,0)$ 一致收敛于 $f(x)$，我们写成：对任意给定的 $\varepsilon > 0$，总可找到正整数 N_ε，当 $m, n > N_\varepsilon$ 时恒有

$$| s_m(x,0) - s_n(x,0) | < \varepsilon,$$

其中

$$s_m(x,y) = \sum_{n=1}^{m} a_n^* \frac{\sinh \frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

我们也知道 $s_m(x,y) - s_n(x,y)$ 满足拉普拉斯方程和在 $x = 0, x = a, y = b$ 上的边界条件. 那么根据最大值原理，在区域 $0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b$ 上，当 $m, n > N_\varepsilon$ 时也恒有

$$|s_m(x,y)-s_n(x,y)|<\varepsilon.$$

于是 $u(x,y)$ 的级数在这个区域上一致收敛，因此函数 $u(x,y)$ 在区域 $0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b$ 上连续.所以得

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^*\sin\frac{n\pi x}{a}=f(x).$$

于是证得形式解(8.7.8)是定解问题(8.7.1)~(8.7.5)的解.

矩形的一般狄利克莱问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & 0<x<a,\quad 0<y<b,\\ u(x,0)=f_1(x), & u(x,b)=f_2(x),\\ u(0,y)=f_3(y), & u(a,y)=f_4(y),\end{cases}$$

可以用分成四个定解问题的方法得到解决，其中每一个定解问题只有一个非齐次边界条件，而其余的三个边界条件为零.于是像前面的狄利克莱问题一样，可确定每个定解问题的解，然后把四个解相加，就得到矩形的一般狄利克莱问题的解.

8.8 泊松方程的狄利克莱问题

对简单区域的泊松方程的狄利克莱问题来说，当其对应的拉普拉斯方程的狄利克莱问题的解已经知道时，它的解是可以立即得到的.

考察泊松方程

$$\nabla^2 u=u_{xx}+u_{yy}=f(x,y),\quad 在 D 内,$$

带有条件

$$u=g(x,y),\quad 在 B 上.$$

假设解可写成下列形式：

$$u=v+w,$$

其中 v 是泊松方程的特解，而 w 是相应齐次方程的解，即

$$\nabla^2 v=f,\quad \nabla^2 w=0.$$

当 v 一旦确定后，狄利克莱问题

$$\begin{cases}\nabla^2 w=0, & 在 D 内,\\ w=-v+g(x,y), & 在 B 上,\end{cases}$$

的解就可确定.当 $f(x,y)$ 是 n 次多项式时，求特解的通常方法是找一个有待定系数的 $n+2$ 次多项式形式的解.

作为一个例子，考察扭转问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = -2, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u(0,y) = 0, & u(a,y) = 0, \\ u(x,0) = 0, & u(x,b) = 0. \end{cases}$$

令 $u = v + w$. 现在假设 v 具有下列形式:

$$v(x,y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2.$$

把它代入上述泊松方程,得

$$2D + 2F = -2.$$

满足这个方程的最简单的方法是选取

$$D = -1, \quad F = 0,$$

而其余的系数都是任意的. 因此我们可取

$$v(x,y) = ax - x^2,$$

使得 v 在 $x=0$ 和 $x=a$ 两条边上变为零. 然后由下列定解问题中求 w:

$$\begin{cases} \nabla^2 w = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ w(0,y) = -v(0,y) = 0, \\ w(a,y) = -v(a,y) = 0, \\ w(x,0) = -v(x,0) = -(ax - x^2), \\ w(x,b) = -v(x,b) = -(ax - x^2). \end{cases}$$

像 8.7 节的狄利克莱问题一样,求得的解是

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cosh\frac{n\pi y}{a} + b_n \sinh\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

利用非齐次边界条件,得到

$$w(x,0) = -(ax - x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{a},$$

$$\begin{aligned} w(x,b) &= -(ax - x^2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cosh\frac{n\pi b}{a} + b_n \sinh\frac{n\pi b}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{a}\int_0^a (x^2 - ax)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 是偶数}, \\ \dfrac{-8a^2}{\pi^3 n^3}, & \text{当 } n \text{ 是奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

和

$$\left(a_n \cosh\frac{n\pi b}{a} + b_n \sinh\frac{n\pi b}{a}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a (x^2 - ax)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x.$$

于是,我们有

$$b_n = \frac{\left(1 - \cosh \frac{n\pi b}{a}\right)a_n}{\sinh \frac{n\pi b}{a}}.$$

因此已知的泊松方程的狄利克莱问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x(a-x) \\ &\quad - \frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\sinh(2n-1)\frac{\pi(b-y)}{a} + \sinh(2n-1)\frac{\pi y}{a}\right]}{\sinh(2n-1)\frac{\pi b}{a}} \\ &\quad \cdot \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi x}{a}}{(2n-1)^3}. \end{aligned}$$

8.9 矩形的诺依曼问题

这里我们将讨论诺依曼问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, & (8.9.1) \\ u_x(0,y) = f_1(y), & (8.9.2) \\ u_x(a,y) = f_2(y), & (8.9.3) \\ u_y(x,0) = g_1(x), & (8.9.4) \\ u_y(x,b) = g_2(x). & (8.9.5) \end{cases}$$

在这种情况下,必须要满足的相容性条件是

$$\int_0^a [g_1(x) - g_2(x)]\mathrm{d}x + \int_0^b [f_1(y) - f_2(y)]\mathrm{d}y = 0. \qquad (8.9.6)$$

假设解的形式为

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y), \qquad (8.9.7)$$

这里,函数 $u_1(x,y)$是定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u_1 = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}(0,y) = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}(a,y) = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial y}(x,0) = g_1(x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial y}(x,b) = g_2(x) \end{cases} \qquad (8.9.8)$$

的解,其中 g_1 和 g_2 满足相容性条件

$$\int_0^a [g_1(x) - g_2(x)]\mathrm{d}x = 0. \tag{8.9.9}$$

函数 $u_2(x,y)$是定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u_2 = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x}(0,y) = f_1(y), \quad \dfrac{\partial u_2}{\partial x}(a,y) = f_2(y), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y}(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u_2}{\partial y}(x,b) = 0 \end{cases} \tag{8.9.10}$$

的解,其中 f_1 和 f_2 满足相容性条件

$$\int_0^b [f_1(y) - f_2(y)]\mathrm{d}y = 0. \tag{8.9.11}$$

这样,解 $u_1(x,y)$和 $u_2(x,y)$都是可以确定的,而且条件(8.9.9)和(8.9.11)也保证条件(8.9.6)是满足的,因此问题就得到解决.

可是,用这种方法得到解是相当受限制的,因为条件(8.9.6)一般不能推出条件(8.9.9)和条件(8.9.11).因此一般地说,用上面叙述的方法来得到矩形的诺依曼问题的解是不可能的.

为了得到一般问题的解,一些学者提出下面的方法.

假定我们设解的形式为

$$u(x,y) = \frac{Y_0(y)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y), \tag{8.9.12}$$

其中 $X_n(x) = \cos(n\pi x/a)$是本征值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = X'(a) = 0, \end{cases}$$

对应于本征值 $\lambda_n = (n\pi/a)^2$ 的本征函数.那么由式(8.9.12),我们知道

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= \frac{2}{a}\int_0^a u(x,y) X_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{a}\int_0^a u(x,y)\cos\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{8.9.13}$$

把方程(8.9.1)的两边乘以$\dfrac{2}{a}\cos(n\pi x/a)$,并从 0 到 a 对 x 积分,得

$$\frac{2}{a}\int_0^a (u_{xx} + u_{yy})\cos\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x = 0,$$

即

$$Y_n'' + \frac{2}{a}\int_0^a u_{xx}\cos\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x = 0.$$

对上式作分部积分并利用边界条件(8.9.2)和(8.9.3),得

$$Y_n'' - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n = F_n(y), \tag{8.9.14}$$

其中

$$F_n(y) = \frac{2}{a}[f_1(y) - (-1)^n f_2(y)].$$

方程(8.9.14)是一个常微分方程，当 $n=1,2,3,\cdots$ 时，它的解可以写成下列形式：

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= A_n \cosh\frac{n\pi y}{a} + B_n \sinh\frac{n\pi y}{a} \\ &\quad + \frac{2}{\pi n}\int_0^y F_n(\tau)\sinh\frac{n\pi}{a}(y-\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{8.9.15}$$

系数 A_n 和 B_n 可由下面两个边界条件确定：

$$\begin{aligned} Y_n'(0) &= \frac{2}{a}\int_0^a u_y(x,0)\cos\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{a}\int_0^a g_1(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{8.9.16}$$

$$Y_n'(b) = \frac{2}{a}\int_0^a g_2(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x. \tag{8.9.17}$$

当 $n=0$ 时，方程(8.9.14)的形式为

$$Y_0'' = \frac{2}{a}[f_1(y) - f_2(y)],$$

因此

$$Y_0' = \frac{2}{a}\int_0^y [f_1(\tau) - f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau + C,$$

其中 C 是积分常数. 对 $n=0$ 利用条件(8.9.16)，得

$$C = \frac{2}{a}\int_0^a g_1(x)\mathrm{d}x.$$

于是，我们有

$$Y_0'(y) = \frac{2}{a}\left\{\int_0^y [f_1(\tau) - f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau + \int_0^a g_1(x)\mathrm{d}x\right\}.$$

因而

$$Y_0'(b) = \frac{a}{2}\left\{\int_0^b [f_1(\tau) - f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau + \int_0^a g_1(x)\mathrm{d}x\right\}.$$

而由式(8.9.17)，我们有

$$Y_0'(b) = \frac{2}{a}\int_0^a g_2(x)\mathrm{d}x.$$

由上面两个 $Y_0'(b)$ 的表达式，可得

$$\int_0^b [f_1(y) - f_2(y)]\mathrm{d}y + \int_0^a [g_1(x) - g_2(x)]\mathrm{d}x = 0,$$

这是矩形的诺依曼问题(8.9.1)~(8.9.5)有解的必要条件.

习　题

1. 在二维情形下,把诺依曼问题化为狄利克莱问题.

2. 利用代换 $\tau = \mathrm{i}ct$ ($\mathrm{i} = \sqrt{-1}$),把波动方程

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

化为拉普拉斯方程

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + u_{\tau\tau} \equiv \nabla^2 u = 0.$$

再通过拉普拉斯方程的解得到在柱坐标系中的波动方程的解,这里假设 $u(r, \theta, z, \tau)$ 是与 z 无关的.

3. 证明如果函数 $u(x,t)$ 在区域 $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$ 内满足热传导方程

$$u_t = ku_{xx},$$

那么 u 或者在 $t=0$ 上,或者在端点 $x=0$ 与 $x=l$ ($0 \leqslant t \leqslant t_0$)上取得最大值.这个性质称为热传导方程的最大值原理.

4. 证明在平面上处处是调和的,并且有上界或有下界的函数必是常数.这个定理称为刘维尔定理.

5. 证明诺依曼问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = -f, & \text{在 } D \text{ 内}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{在 } B \text{ 上} \end{cases}$$

的相容性条件是

$$\iint_D f \mathrm{d}S + \int_B g \mathrm{d}s = 0,$$

其中 B 是区域 D 的边界.

6. 证明如果二次多项式

$$P = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dyz + Ez^2 + Fxz$$

满足条件

$$E = -(A + C),$$

那么它是调和的,并由此得到

$$P = A(x^2 - z^2) + Bxy + C(y^2 - z^2) + Dyz + Fxz.$$

7. 证明诺依曼问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = -f, & \text{在 } D \text{ 内}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{在 } B \text{ 上} \end{cases}$$

的解彼此间至多相差一个常数.

8. 确定下列各定解问题的解：

(a) $$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & 1<r<2, \quad 0<\theta<\pi,\\ u(1,\theta)=\sin\theta, & u(2,\theta)=0,\\ u(r,0)=0, & u(r,\pi)=0;\end{cases}$$

(b) $$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & 1<r<2, \quad 0<\theta<\pi,\\ u(1,\theta)=0, & u(2,\theta)=\theta(\theta-\pi),\\ u(r,0)=0, & u(r,\pi)=0;\end{cases}$$

(c) $$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & 1<r<3, \quad 0<\theta<\pi/2,\\ u(1,\theta)=0, & u(3,\theta)=0,\\ u(r,0)=(r-1)(r-3), & u\left(r,\dfrac{\pi}{2}\right)=0;\end{cases}$$

(d) $$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & 1<r<3, \quad 0<\theta<\pi/2,\\ u(1,\theta)=0, & u(3,\theta)=0,\\ u(r,0)=0, & u\left(r,\dfrac{\pi}{2}\right)=f(r).\end{cases}$$

9. 解定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & a<r<b,\\ u(a,\theta)=f(\theta), & u(b,\theta)=0, \quad 0\leqslant\theta\leqslant\alpha,\\ u(r,0)=\varphi(r), & u(r,\alpha)=0, \quad a\leqslant r\leqslant b.\end{cases}$$

10. 试直接验证泊松积分是拉普拉斯方程的解.

11. 解定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & 0<r<a, \quad 0<\theta<\pi,\\ u(r,0)=0, & u(r,\pi)=0,\\ u(a,\theta)=C\theta & (C\text{ 是常数}), u(0,\theta)\text{ 有界}.\end{cases}$$

12. 解定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u+u=0, & 0<r<a, \quad 0<\theta<\alpha,\\ u(r,0)=0, & u(r,\alpha)=0, \quad 0\leqslant r\leqslant a,\\ u(a,\theta)=f(\theta), & u(0,\theta)\text{ 有界}.\end{cases}$$

13. 求下列狄利克莱问题的解：

$$\begin{cases}\nabla^2 u=-2, & r<a,\\ u(a,\theta)=0.\end{cases}$$

14. 解下列定解问题：

(a) $$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & 1<r<2,\\ u_r(1,\theta)=\sin\theta, & \\ u_r(2,\theta)=0, & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi;\end{cases}$$

(b) $$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & 1<r<2,\\ u_r(1,\theta)=0, & \\ u_r(2,\theta)=\theta-\pi, & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

15. 解定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u = 0, & a < r < b,\\ u_r(a,\theta) = f(\theta), & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\\ u_r(b,\theta) = g(\theta), & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\end{cases}$$

其中

$$\int_{r=a} f\mathrm{d}s + \int_{r=b} g\mathrm{d}s = 0.$$

16. 解半圆盘的劳平问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u = 0, & r < R, \quad 0 < \theta < \pi,\\ u_r(R,\theta) = \theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\\ u(r,0) = 0, & u(r,\pi) = 0.\end{cases}$$

17. 解定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u = 0, & a < r < b, \quad 0 < \theta < \alpha,\\ u_r(a,\theta) = 0, & u_r(b,\theta) = f(\theta),\\ u(r,0) = 0, & u(r,\alpha) = 0,\end{cases} \quad a \leqslant r \leqslant b.$$

18. 确定下列混杂边值问题的解：

$$\begin{cases}\nabla^2 u = 0, & r < R, \quad 0 < \theta < 2\pi,\\ u_r(R,\theta) + hu(R,\theta) = f(\theta) & (h\ \text{是常数}).\end{cases}$$

19. 解定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u = 0, & a < r < b,\\ u_r(a,\theta) - hu(a,\theta) = f(\theta),\\ u_r(b,\theta) + hu(b,\theta) = g(\theta).\end{cases}$$

20. 求下列诺依曼问题的解：

$$\begin{cases}\nabla^2 u = -r^2\sin 2\theta, & r_1 < r < r_2,\\ u_r(r_1,\theta) = 0, & u_r(r_2,\theta) = 0.\end{cases}$$

21. 解劳平问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u = -r^2\sin 2\theta, & r_1 < r < r_2,\\ u(r_1,\theta) = 0,\\ u_r(r_2,\theta) = 0.\end{cases}$$

22. 解下列狄利克莱问题：

(a) $$\begin{cases}\nabla^2 u = 0, & 0<x<1, \quad 0<y<1,\\ u(x,0) = x(x-1), & u(x,1) = 0,\\ u(0,y) = 0, & u(1,y) = 0;\end{cases}$$

(b) $$\begin{cases}\nabla^2 u = 0, & 0<x<1, \quad 0<y<1,\\ u(x,0) = 0, & u(x,1) = \sin\pi x,\\ u(0,y) = 0, & u(1,y) = 0;\end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & 0<x<1, \quad 0<y<1,\\ u(x,0)=0, & u(x,1)=0,\\ u(0,y)=\left(\cos\dfrac{\pi y}{2}-1\right)\cos\dfrac{\pi y}{2}, & u(1,y)=0;\end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & 0<x<1, \quad 0<y<1,\\ u(x,0)=0, & u(x,1)=0,\\ u(0,y)=0, & u(1,y)=\sin\pi y\cos\pi y.\end{cases}$$

23. 解下列诺依曼问题：

(a)
$$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & 0<x<\pi, \quad 0<y<\pi,\\ u_x(0,y)=\left(y-\dfrac{\pi}{2}\right), & u_x(\pi,y)=0,\\ u_y(x,0)=0, & u_y(x,\pi)=0;\end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & 0<x<\pi, \quad 0<y<\pi,\\ u_x(0,y)=0, & u_x(\pi,y)=2\cos y,\\ u_y(x,0)=0, & u_y(x,\pi)=0;\end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & 0<x<\pi, \quad 0<y<\pi,\\ u_x(0,y)=0, & u_x(\pi,y)=0,\\ u_y(x,0)=\cos x, & u_y(x,\pi)=0;\end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & 0<x<\pi, \quad 0<y<\pi,\\ u_x(0,y)=0, & u_x(\pi,y)=0,\\ u_y(x,0)=0, & u_y(x,\pi)=x^2-\dfrac{2\pi x}{3}.\end{cases}$$

24. 一长为 a，宽为 b 的矩形薄板中的稳恒状态的温度分布所满足的方程为

$$\nabla^2 u=0, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b.$$

设在 $x=0$ 的一边上温度保持零度，在 $x=a$ 的一边上绝热，在 $y=0$ 的一边上温度是给定的，而在 $y=b$ 的一边上热量可以自由散发到温度为零度的周围介质中去，即这一问题的边界条件为

$$\begin{cases}u(0,y)=0,\\ u_x(a,y)=0,\\ u(x,0)=f(x),\\ u_y(x,b)+hu(x,b)=0.\end{cases}$$

试确定板的温度分布.

25. 解狄利克莱问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u=-2y, & 0<x<1, \quad 0<y<1,\\ u(0,y)=0, & u(1,y)=0,\\ u(x,0)=0, & u(x,1)=0.\end{cases}$$

26. 一等腰直角三角形由 $x=0, y=0$ 和 $y=a-x$ 三边组成，其中 a 是常数. 求在斜边上等于零，而在其他两边上取给定值的调和函数.

27. 求下列诺依曼问题的解：

$$\begin{cases}\nabla^2 u = x^2 - y^2, & 0 < x < a,\ 0 < y < a,\\ u_x(0,y) = 0, & u_x(a,y) = 0,\\ u_y(x,0) = 0, & u_y(x,a) = 0.\end{cases}$$

28. 解第三边值问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,\\ u_x(0,y) - hu(0,y) = 0 \quad (h \text{ 是常数}),\\ u_x(1,y) + hu(1,y) = 0,\\ u_y(x,0) - hu(x,0) = 0,\\ u_y(x,1) + hu(x,1) = 0.\end{cases}$$

29. 确定下列定解问题的解：

$$\begin{cases}\nabla^2 u = 1, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi,\\ u(0,y) = 0,\\ u_x(\pi,y) = 0,\\ u_y(x,0) = 0,\\ u_y(x,\pi) + hu(x,\pi) = f(x).\end{cases}$$

30. 求出下列诺依曼问题的解的积分表达式：

$$\begin{cases}\nabla^2 u = f, & \text{在 } D \text{ 内},\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{在 } B \text{ 上}.\end{cases}$$

31. 利用格林函数求下列定解问题的解：

$$\begin{cases}\nabla^2 u = f, & \text{在 } D \text{ 内},\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + hu = g, & \text{在 } B \text{ 上}.\end{cases}$$

第九章 高维问题

多于两个空间变量的定解问题的讨论要比两个空间变量的定解问题的讨论更加复杂.在本章中,我们将介绍许多带有各种边界条件的高维问题.

9.1 立方体的狄利克莱问题

在立方体内的稳恒状态的温度分布由下列拉普拉斯方程描述:

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,\quad 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, 0 < z < \pi.$$

在立方体表面上的温度除了在表面 $z=0$ 上之外,都保持零度,即边界条件为

$$u(0,y,z) = u(\pi,y,z) = 0,$$
$$u(x,0,z) = u(x,\pi,z) = 0,$$
$$u(x,y,\pi) = 0,$$
$$u(x,y,0) = f(x,y).$$

用分离变量法,假设解的形式为

$$u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

把这样的解代入拉普拉斯方程,得到

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0.$$

上式除以 XYZ,可得

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z}.$$

因为这个等式的右边只依赖于 z,而其左边不依赖于 z,所以两边都必须等于常数.于是有

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} = \lambda.$$

同样,我们有

$$\frac{X''}{X} = \lambda - \frac{Y''}{Y} = \mu.$$

因此,就得到下面三个常微分方程

$$X'' - \mu X = 0,$$
$$Y'' - (\lambda - \mu)Y = 0,$$
$$Z'' + \lambda Z = 0.$$

利用边界条件,可以得到 X 的本征值问题

$$\begin{cases} X'' - \mu X = 0, \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

的本征值是

$$\mu = -m^2, m = 1,2,3,\cdots,$$

而对应的本征函数是 $\sin mx$.

类似地,可得 Y 的本征值问题

$$\begin{cases} Y'' - (\lambda - \mu)Y = 0, \\ Y(0) = Y(\pi) = 0 \end{cases}$$

的本征值是

$$\lambda - \mu = -n^2, n = 1,2,3,\cdots,$$

而对应的本征函数是 $\sin ny$.

因为 $\lambda = -(m^2 + n^2)$,由此可得方程 $Z'' + \lambda Z = 0$ 满足条件 $Z(\pi) = 0$ 的解是

$$Z_{mn}(z) = C_{mn}\sinh\sqrt{m^2 + n^2}(\pi - z).$$

于是拉普拉斯方程满足齐次边界条件的解具有下列形式:

$$u(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\sinh\sqrt{m^2 + n^2}(\pi - z)\sin mx\sin ny.$$

利用非齐次边界条件,形式地得到

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\sinh(\pi\sqrt{m^2 + n^2})\sin mx\sin ny.$$

于是这个二重傅里叶级数的系数为

$$a_{mn}\sinh\pi\sqrt{m^2 + n^2} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\sin mx\sin ny\,dx\,dy.$$

因此,立方体的狄利克莱问题的形式解可写成下列形式:

$$u(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}\frac{\sinh\sqrt{m^2 + n^2}(\pi - z)}{\sinh\pi\sqrt{m^2 + n^2}}\sin mx\sin ny,$$

其中

$$b_{mn} = a_{mn}\sinh\pi\sqrt{m^2 + n^2}.$$

9.2　圆柱体的狄利克莱问题

【例 9.2.1】　考察不带电的圆柱体内的电势 u 的问题. 这时电势 u 满足

拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0,$$

$$0 < r < a, \quad 0 < z < l, \quad 0 < \theta < 2\pi. \qquad (9.2.1)$$

设圆柱体的侧面 $r=a$ 和上底 $z=l$ 是接地的.即电势为零,而在下底 $z=0$ 上,电势是已知的.其边界条件为

$$\begin{cases} u(a,\theta,z) = u(r,\theta,l) = 0, \\ u(r,\theta,0) = f(r,\theta), \end{cases} \qquad (9.2.2)$$

其中 $f(a,\theta)=0$.

设解的形式为

$$u(r,\theta,z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z).$$

把这样的解代入拉普拉斯方程,得到

$$\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = -\frac{Z''}{Z} = \lambda.$$

而且由此可得

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} - r^2\lambda = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu.$$

因此我们就得到三个常微分方程

$$r^2R'' + rR' - (\lambda r^2 + \mu)R = 0, \qquad (9.2.3)$$

$$\Theta'' + \mu\Theta = 0, \qquad (9.2.4)$$

$$Z'' + \lambda Z = 0. \qquad (9.2.5)$$

利用周期条件,可以得到 $\Theta(\theta)$的本征值问题

$$\begin{cases} \Theta'' + \mu\Theta = 0, \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi), \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases}$$

的本征值是

$$\mu = n^2, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

而对应的本征函数是 $\sin n\theta, \cos n\theta$. 于是

$$\Theta_n(\theta) = A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta. \qquad (9.2.6)$$

假定 λ 是负的实数,设 $\lambda = -\beta^2$,其中 $\beta>0$. 利用条件 $Z(l)=0$,方程(9.2.5)的解可写成下列形式:

$$Z(z) = C\sinh\beta(l - z). \qquad (9.2.7)$$

然后我们引进新自变量 $\xi=\beta r$,方程(9.2.3)变成

$$\xi^2 \frac{d^2R}{d\xi^2} + \xi \frac{dR}{d\xi} + (\xi^2 - n^2)R = 0.$$

这个方程是 n 阶贝塞尔方程,它的通解是

$$R(\xi) = DJ_n(\xi) + EY_n(\xi),$$

其中 J_n 和 Y_n 分别是第一类和第二类 n 阶贝塞尔函数.用原来的变量表示,我们有

$$R(r) = DJ_n(\beta r) + EY_n(\beta r).$$

因为 $Y_n(\beta r)$在 $r=0$ 处是无限的,所以我们选取 $E=0$.另外,条件 $R(a)=0$ 要求有

$$J_n(\beta a) = 0.$$

对于每一个 $n\geqslant 0$,上式存在无穷多个正零点.把这些正零点排列成单调增加无穷序列,我们有

$$0 < \alpha_{n1} < \alpha_{n2} < \cdots < \alpha_{nm} < \cdots.$$

因此,得

$$\beta_{nm} = \alpha_{nm}/a.$$

所以

$$R_{nm}(r) = D_{nm}J_n(\alpha_{nm}r/a). \tag{9.2.8}$$

于是解最后具有下列形式:

$$u(r,\theta,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\alpha_{nm}\frac{r}{a}\right)(a_{nm}\cos n\theta + b_{nm}\sin n\theta) \cdot \sinh\alpha_{nm}\frac{(l-z)}{a}.$$

为了满足非齐次边界条件,要求有

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\alpha_{nm}\frac{r}{a}\right)(a_{nm}\cos n\theta + b_{nm}\sin n\theta) \cdot \sinh\alpha_{nm}\frac{l}{a}.$$

因此,系数 a_{nm} 和 b_{nm} 为

$$a_{0m} = \frac{1}{\pi a^2\sinh\left(\alpha_{0m}\frac{l}{a}\right)[J_1(\alpha_{0m})]^2} \cdot \int_0^a\int_0^{2\pi} f(r,\theta)J_0\left(\alpha_{0m}\frac{r}{a}\right)r\,dr\,d\theta,$$

$$a_{nm} = \frac{2}{\pi a^2\sinh\left(\alpha_{nm}\frac{l}{a}\right)[J_{n+1}(\alpha_{nm})]^2}$$

$$\cdot\int_0^a\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\mathrm{J}_n\left(\alpha_{nm}\frac{r}{a}\right)\cos n\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

$$b_{nm}=\frac{2}{\pi a^2\sinh\left(\alpha_{nm}\frac{l}{a}\right)[\mathrm{J}_{n+1}(\alpha_{nm})]^2}$$

$$\cdot\int_0^a\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\mathrm{J}_n\left(\alpha_{nm}\frac{r}{a}\right)\sin n\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

【例 9.2.2】 我们将讨论与上面同样的问题,但带有不同的边界条件.考察定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & 0\leqslant r<a, \quad 0<z<\pi,\\ u(r,\theta,0)=0,\\ u(r,\theta,\pi)=0,\\ u(a,\theta,z)=f(\theta,z).\end{cases}$$

和上面一样,用分离变量法可以得到三个常微分方程:

$$r^2R''+rR'-(\lambda r^2+\mu)R=0,$$

$$\Theta''+\mu\Theta=0,$$

$$Z''+\lambda Z=0.$$

根据周期条件,再和上面的例子一样,得 $\Theta(\theta)$的本征值问题的本征值是

$$\mu=n^2,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

而对应的本征函数是 $\sin n\theta,\cos n\theta$.于是,我们有

$$\Theta_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta.$$

现在设 $\lambda=\beta^2$,其中 $\beta>0$,那么本征值问题

$$\begin{cases}Z''+\beta^2Z=0,\\ Z(0)=0,\quad Z(\pi)=0,\end{cases}$$

有解

$$Z_m(z)=C_m\sin mz,$$

其中 $m=1,2,3,\cdots$.

最后,我们有

$$r^2R''+rR'-(m^2r^2+n^2)R=0,$$

即

$$R''+\frac{1}{r}R'-\left(m^2+\frac{n^2}{r^2}\right)R=0.$$

上述方程的解是

$$R(r)=D\mathrm{I}_n(mr)+E\mathrm{K}_n(mr),$$

其中 I_n 和 K_n 分别是第一类和第二类 n 阶修正贝塞尔函数.

因为 R 在 $r=0$ 处必须是有限的.我们取 $E=0$.因此 R 具有下列形式:

$$R_{mn}(r) = D_{mn}\mathrm{I}_n(mr).$$

利用非齐次边界条件,我们求得这个定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(r,\theta,z) = &\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_{m0}}{2}\frac{\mathrm{I}_0(mr)}{\mathrm{I}_0(ma)}\sin mz \\ &+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{mn}\cos n\theta + b_{mn}\sin n\theta) \\ &\cdot\frac{\mathrm{I}_n(mr)}{\mathrm{I}_n(ma)}\sin mz, \end{aligned}$$

其中

$$a_{mn} = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,z)\sin mz\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z,$$

$$b_{mn} = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,z)\sin mz\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

9.3　球的狄利克莱问题

【例 9.3.1】　为了确定一个球内的势,我们把拉普拉斯方程化为下列球坐标形式:

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\cot\theta}{r^2}u_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad (9.3.1)$$

$$0 \leqslant r < a,\quad 0 < \theta < \pi,\quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

设在球面上给定的势是

$$u(a,\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi). \quad (9.3.2)$$

用分离变量法,假设解的形式为

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi).$$

把 u 代入拉普拉斯方程,就得到三个常微分方程

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0, \quad (9.3.3)$$

$$\sin^2\theta\Theta'' + \sin\theta\cos\theta\Theta' + (\lambda\sin^2\theta - \mu)\Theta = 0, \quad (9.3.4)$$

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0. \quad (9.3.5)$$

方程(9.3.5)的通解是

$$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\mu}\varphi + B\sin\sqrt{\mu}\varphi.$$

由周期条件,得

$$\sqrt{\mu} = m, m = 0,1,2,\cdots.$$

于是,我们有

$$\Phi_m(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi. \tag{9.3.6}$$

引进变量 $\xi=\cos\theta$ 后,方程(9.3.4)变为

$$(1-\xi^2)\Theta'' - 2\xi\Theta' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right)\Theta = 0,$$

这个方程是连带勒让德方程.当 $\lambda = n(n+1), n=0,1,2,\cdots$ 时,它的通解是

$$\Theta(\theta) = C\mathrm{P}_n^m(\cos\theta) + D\mathrm{Q}_n^m(\cos\theta),$$

其中 P_n^m 和 Q_n^m 分别是第一类和第二类连带勒让德函数.

因为 $\Theta(\theta)$ 在 $\theta=0,\pi$ 处的有界性条件对应于 $\Theta(\xi)$ 在 $\xi=\pm1$ 处的有界性条件,而 $\mathrm{Q}_n^m(\xi)$ 在 $\xi=\pm1$ 处是无限的,所以我们选取 $D=0$.于是方程(9.3.4)的有界解为

$$\Theta_{nm}(\theta) = C_{nm}\mathrm{P}_n^m(\cos\theta). \tag{9.3.7}$$

因为方程(9.3.3)是欧拉方程,所以解的形式为

$$R(r) = r^\beta.$$

把它代入方程(9.3.3),β 就满足下列方程:

$$\beta^2 + \beta - n(n+1) = 0,$$

由此求得两个根 $\beta=n$ 和 $\beta=-(1+n)$.因此方程(9.3.3)的通解是

$$R(r) = Er^n + Fr^{-(1+n)}.$$

因为 R 在 $r=0$ 处是有限的,所以应有 $F=0$.于是,得到

$$R_n(r) = E_n r^n. \tag{9.3.8}$$

因而,在球坐标系中的拉普拉斯方程的解是

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} r^n \mathrm{P}_n^m(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi).$$

为了使 u 在边界上等于给定的函数 $f(\theta,\varphi)$,必须

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} a^n \mathrm{P}_n^m(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi),$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$.根据函数 $\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ 和 $\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$ 的正交性,系数为

$$a_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi a^n(n+m)!} \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$b_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi a^n(n+m)!}$$

$$\cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

其中

$$m \leqslant n, n = 1,2,3,\cdots, m = 1,2,3,\cdots;$$

$$a_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi a^n}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\mathrm{P}_n(\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

$$n = 0,1,2,\cdots.$$

【例 9.3.2】 为了确定在一均匀电场内的接地导电球外的电势分布,要求我们解下列定解问题:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & r > a, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi, \\ u(a,\theta) = 0, \\ u \to -E_0 r\cos\theta, & \text{当 } r \to \infty. \end{cases}$$

设这个均匀电场是 z 方向的,从而使得电势 u 与 φ 无关,因此拉普拉斯方程具有下列形式:

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\cot\theta}{r^2}u_\theta = 0.$$

设解的形式为

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta),$$

把这样的解代入拉普拉斯方程,就得到两个常微分方程:

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0,$$

$$\sin^2\theta\Theta'' + \sin\theta\cos\theta\Theta' + \lambda\sin^2\theta\Theta = 0.$$

如果我们令 $\lambda = n(n+1)$,其中 $n = 0,1,2,\cdots$,那么上面第二个常微分方程是勒让德方程.这个方程的通解是

$$\Theta_n(\theta) = A_nP_n(\cos\theta) + B_nQ_n(\cos\theta),$$

其中 P_n 和 Q_n 分别是第一类和第二类勒让德函数.为了使解在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 处是有限的,应取 $B_n=0$(与上面的例子一样).于是,得到

$$\Theta_n(\theta) = A_n\mathrm{P}_n(\cos\theta).$$

关于 R 的方程的解是

$$R_n(r) = C_nr^n + D_nr^{-(n+1)},$$

因而,势函数是

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}[a_nr^n + b_nr^{-(n+1)}]\mathrm{P}_n(\cos\theta).$$

为了满足在无穷远处的条件,必须有

$$a_1 = -E_0, a_n = 0 \quad (n \geqslant 2).$$

因此

$$u(r,\theta)=-E_0r\cos\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{r^{n+1}}\mathrm{P}_n(\cos\theta).$$

由边界条件 $u(a,\theta)=0$,得到

$$0=-E_0a\cos\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a^{n+1}}\mathrm{P}_n(\cos\theta).$$

再利用勒让德函数的正交性,求得 b_n 为

$$b_n=\frac{2n+1}{2}E_0a^{n+2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta\mathrm{P}_n(\cos\theta)\mathrm{d}(\cos\theta)=E_0a^3\delta_{n1},$$

这是因为上面的积分除了 $n=1$ 外,对所有的 n 都等于零.因此,电势分布是

$$u(r,\theta)=-E_0r\cos\theta+E_0\frac{a^3}{r^2}\cos\theta.$$

【例 9.3.3】 一个半径为 a 的介质球放在均匀电场 E_0 内,求球内和球外的电势分布.

这个问题的定解问题是

$$\begin{cases}\nabla^2u_1=\nabla^2u_2=0,\\ K\dfrac{\partial u_1}{\partial r}=\dfrac{\partial u_2}{\partial r},\text{在 } r=a \text{ 上},\\ u_1=u_2,\text{在 } r=a \text{ 上}.\\ u_2\to-E_0r\cos\theta,\text{当 } r\to\infty,\end{cases}$$

其中 u_1 和 u_2 分别是球内和球外的电势,而 K 是介电常数.

像上面的例子一样,势函数是

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}[a_nr^n+b_nr^{-(n+1)}]\mathrm{P}_n(\cos\theta).\qquad(9.3.9)$$

因为 u_1 在原点处必须是有限的,所以取

$$u_1(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n\mathrm{P}_n(\cos\theta),r\leqslant a.\qquad(9.3.10)$$

对于 u_2,它必须以给定的方式趋于无穷远点,我们选取

$$u_2(r,\theta)=-E_0r\cos\theta+\sum_{n=0}^{\infty}b_nr^{-(n+1)}\mathrm{P}_n(\cos\theta),r\geqslant a.\qquad(9.3.11)$$

由 $r=a$ 处的两个连续性条件,得到

$$a_1=-E_0+\frac{b_1}{a^3},$$

$$Ka_1=-E_0-\frac{2b_1}{a^3},$$

$$a_n = b_n = 0, \quad n \neq 1.$$

于是求得系数 a_1 和 b_1 为

$$a_1 = -\frac{3E_0}{K+2}, \quad b_1 = E_0 a^3 \frac{K-1}{K+2}.$$

因此,当 $r \leqslant a$ 时,电势分布为

$$u_1(r,\theta) = -\frac{3E_0}{K+2} r\cos\theta,$$

而当 $r \geqslant a$ 时,电势分布为

$$u_2(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + E_0 a^3 \frac{K-1}{K+2} r^{-2}\cos\theta.$$

【例 9.3.4】 确定在两个取不同常电势的同心球之间的电势分布.

这里,需要解下列定解问题:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, a < r < b, \\ u = A, \text{在 } r = a \text{ 上}, \\ u = B, \text{在 } r = b \text{ 上}. \end{cases}$$

在这种情况下,电势只依赖于径向距离.因此,我们有

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0.$$

用初等积分法,可得

$$u(r) = C_1 + \frac{C_2}{r}.$$

利用边界条件,得到

$$C_1 = \frac{Bb - Aa}{b - a},$$

$$C_2 = (A - B)\frac{ab}{b - a}.$$

于是电势分布是

$$u(r) = \frac{Bb - Aa}{b - a} + \frac{(A - B)ab}{(b - a)r}$$
$$= \frac{Bb}{r}\frac{r - a}{b - a} + \frac{Aa}{r}\frac{b - r}{b - a}.$$

9.4 波动方程和热传导方程

三个空间变量的波动方程可写成

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u, \tag{9.4.1}$$

其中∇^2是三维拉普拉斯算子.

用分离变量法,假设解的形式为

$$u(x,y,z,t) = U(x,y,z)T(t).$$

把这样的解代入方程(9.4.1),得

$$T'' + \lambda c^2 T = 0, \tag{9.4.2}$$

$$\nabla^2 U + \lambda U = 0, \tag{9.4.3}$$

其中 λ 是分离常数.这里变量已经分离了,下一步就是要确定方程(9.4.2)和(9.4.3)的解.

然后,考察热传导方程

$$u_t = k\nabla^2 u. \tag{9.4.4}$$

和上面一样,找下列形式的解:

$$u(x,y,z,t) = U(x,y,z)T(t).$$

把这样的解代入方程(9.4.4),可得

$$T' + \lambda k T = 0,$$

$$\nabla^2 U + \lambda U = 0.$$

于是我们看到,像上面情况一样,这里的问题主要是解亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 U + \lambda U = 0.$$

9.5 膜的振动

作为高维波动方程的一个特例,我们来确定一长为 a,宽为 b 的膜振动问题的解.这个位移函数 $u(x,y,t)$的初边值问题是

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0, & (9.5.1) \\ u(x,y,0) = f(x,y), 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b, & (9.5.2) \\ u_t(x,y,0) = g(x,y), 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b, & (9.5.3) \\ u(0,y,t) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, t > 0, & (9.5.4) \\ u(a,y,t) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, t > 0, & (9.5.5) \\ u(x,0,t) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, t > 0, & (9.5.6) \\ u(x,b,t) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, t > 0. & (9.5.7) \end{cases}$$

我们刚才已指出,波动方程分离变量后的两个方程是

$$T'' + \lambda c^2 T = 0 \tag{9.5.8}$$

和

$$\nabla^2 U + \lambda U = 0, \tag{9.5.9}$$

但在这里，$\nabla^2 U = U_{xx} + U_{yy}$. 令 $\lambda = \alpha^2$，那么方程(9.5.8)的解是

$$T(t) = A\cos\alpha ct + B\sin\alpha ct.$$

现在找方程(9.5.9)的下列形式的解：

$$U(x,y) = X(x)Y(y).$$

把这样的解代入方程(9.5.9)，就得到两个常微分方程：

$$X'' - \mu X = 0$$

和

$$Y'' + (\lambda + \mu)Y = 0.$$

如果令 $\mu = -\beta^2$，那么上面两个常微分方程的解的形式为

$$X(x) = C\cos\beta x + D\sin\beta x,$$

$$Y(y) = E\cos\gamma y + F\sin\gamma y,$$

其中

$$\gamma^2 = \lambda + \mu = \alpha^2 - \beta^2.$$

根据齐次边界条件(9.5.4)和(9.5.5)，可得

$$X(0) = X(a) = 0,$$

于是应有 $C=0$ 及

$$D\sin\beta a = 0.$$

由上式可推得当 $D\neq 0$ 时，$\beta = m\pi/a$. 同样，根据齐次边界条件(9.5.6)和(9.5.7)，可得

$$Y(0) = Y(b) = 0,$$

因此必定有 $E=0$ 及

$$F\sin\gamma b = 0.$$

由上式可推得当 $F\neq 0$ 时，$\gamma = n\pi/b$. 注意到 m 和 n 都是无关的整数，我们得到下列形式的位移函数：

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{mn}\cos\alpha_{mn}ct + b_{mn}\sin\alpha_{mn}ct) \cdot \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{9.5.10}$$

其中 $\alpha_{mn}^2 = (m^2\pi^2/a^2) + (n^2\pi^2/b^2)$，$a_{mn}$ 和 b_{mn} 都是常数.

现在利用非齐次初始条件(9.5.2)，应有

$$u(x,y,0) = f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

因此

$$a_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{9.5.11}$$

同样,由 u_t 的初始条件(9.5.3)推得

$$u_t(x,y,0)=g(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}\alpha_{mn}c\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

由此可得

$$b_{mn}=\frac{4}{\alpha_{mn}abc}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (9.5.12)$$

因此矩形膜振动问题的解由(9.5.10)~(9.5.12)各式给出.

9.6 矩形板的热传导

二维问题的另外一个例子是矩形薄板内的热传导问题. 设长为 a,宽为 b 的板在侧面 $x=0$ 和 $x=a$ 处完全绝热,其另外两个侧面温度保持零度,初始温度分布是 $f(x,y)$. 这时我们要找下列初边值问题的解:

$$\begin{cases}u_t=k\nabla^2 u, & 0<x<a,0<y<b,t>0, & (9.6.1)\\ u(x,y,0)=f(x,y), & 0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b, & (9.6.2)\\ u_x(0,y,t)=0, & 0\leqslant y\leqslant b,t>0, & (9.6.3)\\ u_x(a,y,t)=0, & 0\leqslant y\leqslant b,t>0, & (9.6.4)\\ u(x,0,t)=0, & 0\leqslant x\leqslant a,t>0, & (9.6.5)\\ u(x,b,t)=0, & 0\leqslant x\leqslant a,t>0. & (9.6.6)\end{cases}$$

像前面已指出的那样,我们可求得这个定解问题分离变量后的两个方程是

$$T'+\lambda kT=0, \qquad (9.6.7)$$

$$\nabla^2 U+\lambda U=0. \qquad (9.6.8)$$

假设解的形式为

$$U(x,y)=X(x)Y(y).$$

把这样的解代入方程(9.6.8),就得到两个常微分方程

$$X''-\mu X=0, \qquad (9.6.9)$$

$$Y''+(\lambda+\mu)Y=0. \qquad (9.6.10)$$

因为对 x 的边界条件都是齐次的,所以我们选取 $\mu=-\alpha^2$,得到

$$X(x)=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x.$$

因为 $X'(0)=0$,所以 $B=0$,又因 $X'(a)=0$,得

$$\sin\alpha a=0,A\neq 0.$$

由此得到

$$\alpha=m\pi/a,\qquad m=1,2,3,\cdots.$$

注意到 $\mu=0$ 也是一个本征值,因而

$$X_m(x)=A_m\cos(m\pi x/a),m=0,1,2,\cdots.$$

类似地求方程(9.6.10)的非零解 $Y(y)$. 我们令 $\beta^2=\lambda+\mu=\lambda-\alpha^2$,得到

$$Y(y)=C\cos\beta y+D\sin\beta y.$$

利用齐次边界条件,得 $C=0$ 及

$$\sin\beta b=0,\quad D\neq 0.$$

因此,得到

$$\beta=n\pi/b,\quad n=1,2,3,\cdots$$

和

$$Y_n(y)=D_n\sin(n\pi y/b).$$

由于 $\lambda=\alpha^2+\beta^2$,因此方程(9.6.7)的解可写成下列形式:

$$T_{mn}(t)=E_{mn}e^{-\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2kt}.$$

于是,热传导方程(9.6.1)满足边界条件(9.6.3)~(9.6.6)的解可写为

$$u(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}e^{-\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2kt}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\tag{9.6.11}$$

其中 $a_{mn}=A_mD_nE_{mn}$ 是任意常数.

利用初始条件,得

$$u(x,y,0)=f(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

这是一个二重傅里叶级数,系数为

$$\begin{cases}a_{0n}=\dfrac{2}{ab}\displaystyle\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy,\\ a_{mn}=\dfrac{4}{ab}\displaystyle\int_0^a\int_0^b f(x,y)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy,m\geqslant 1.\end{cases}\tag{9.6.12}$$

因此,已给的热传导问题的解由式(9.6.11)和(9.6.12)给出.

9.7　三维空间的波

在长方体内由于初始扰动而引起的波的传播,可由下列初边值问题的解来描述:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\nabla^2 u, 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < d, t > 0, & (9.7.1) \\ u(x,y,z,0) = f(x,y,z), & (9.7.2) \\ u_t(x,y,z,0) = g(x,y,z), & (9.7.3) \\ u(0,y,z,t) = 0, & (9.7.4) \\ u(a,y,z,t) = 0, & (9.7.5) \\ u(x,0,z,t) = 0, & (9.7.6) \\ u(x,b,z,t) = 0, & (9.7.7) \\ u(x,y,0,t) = 0, & (9.7.8) \\ u(x,y,d,t) = 0. & (9.7.9) \end{cases}$$

设解具有形式

$$u(x,y,z,t) = U(x,y,z)T(t),$$

那么分离变量后的两个方程是

$$T'' + \lambda c^2 T = 0, \tag{9.7.10}$$

$$\nabla^2 U + \lambda U = 0. \tag{9.7.11}$$

再假设 U 的形式为

$$U(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z),$$

把这个式子代入方程(9.7.11),得

$$X'' - \mu X = 0, \tag{9.7.12}$$

$$Y'' - \nu Y = 0, \tag{9.7.13}$$

$$Z'' + (\lambda + \mu + \nu)Z = 0. \tag{9.7.14}$$

由于对 x 的边界条件是齐次的,所以我们令 $\mu = -\alpha^2$,得到

$$X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x.$$

像前面的例子一样,可得

$$X_l(x) = B_l\sin\frac{l\pi x}{a}, l = 1,2,3,\cdots.$$

同样,令 $\nu = -\beta^2$,得

$$Y(y) = C\cos\beta y + D\sin\beta y,$$

因而有

$$Y_m(y) = D_m\sin\frac{m\pi y}{b}, m = 1,2,3,\cdots.$$

再选取 $\gamma^2 = \lambda + \mu + \nu = \lambda - \alpha^2 - \beta^2$,得到

$$Z(z) = E\cos\gamma z + F\sin\gamma z.$$

利用对 z 的齐次边界条件,得

$$Z_n(z) = F_n\sin\frac{n\pi z}{d}, n = 1,2,3,\cdots.$$

因为方程(9.7.10)的解是

$$T_{lmn}(t)=G_{lmn}\cos\sqrt{\lambda_{lmn}}ct+H_{lmn}\sin\sqrt{\lambda_{lmn}}ct,$$

所以波动方程(9.7.1)满足边界条件(9.7.4)~(9.7.9)的解是

$$u(x,y,z,t)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{lmn}\cos\sqrt{\lambda_{lmn}}ct+b_{lmn}\sin\sqrt{\lambda_{lmn}}ct\right]$$
$$\cdot\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{d},$$

其中 a_{lmn} 和 b_{lmn} 是任意常数. 系数 a_{lmn} 由初始条件 $u(x,y,z,0)=f(x,y,z)$ 确定,且可求得为

$$a_{lmn}=\frac{8}{abd}\int_0^a\int_0^b\int_0^d f(x,y,z)\sin\frac{l\pi x}{a}$$
$$\cdot\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{d}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

而系数 b_{lmn} 由初始条件 $u_t(x,y,z,0)=g(x,y,z)$ 确定,且可求得为

$$b_{lmn}=\frac{8}{\sqrt{\lambda_{lmn}}cabd}\int_0^a\int_0^b\int_0^d g(x,y,z)$$
$$\cdot\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{d}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中

$$\lambda_{lmn}=\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{d^2}\right)\pi^2.$$

9.8 长方体中的热传导

像波动方程的情形一样,我们可确定三个空间变量的热传导方程的解. 考察在区域 $0<x<a,0<y<b,0<z<d$ 中的热量分布问题. 设物体表面温度保持零度,而且最初已经加热. 这个定解问题可写成

$$\begin{cases}u_t=k\nabla^2u,0<x<a,0<y<b,0<z<d,t>0,\\ u(x,y,z,0)=f(x,y,z),0<x<a,0<y<b,0<z<d,\\ u(0,y,z,t)=0,\quad u(a,y,z,t)=0,\\ u(x,0,z,t)=0,\quad u(x,b,z,t)=0,\\ u(x,y,0,t)=0,\quad u(x,y,d,t)=0.\end{cases}$$

和前面一样,分离变量后的两个方程是

$$T'+\lambda kT=0, \tag{9.8.1}$$

$$\nabla^2U+\lambda U=0. \tag{9.8.2}$$

如果假设 U 的形式为

$$U(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z),$$

那么亥姆霍兹方程(9.8.2)的解是

$$U_{lmn}(x,y,z)=B_lD_mF_n\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{d}.$$

因为方程(9.8.1)的解是

$$T_{lmn}(t)=G_{lmn}\mathrm{e}^{-\lambda_{lmn}kt},$$

所以热传导方程的解为

$$u(x,y,z,t)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{lmn}\mathrm{e}^{-\lambda_{lmn}kt}\cdot\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{d},$$

其中 $\lambda_{lmn}=[(l^2/a^2)+(m^2/b^2)+(n^2/d^2)]\pi^2$ 和 a_{lmn} 都是常数. 利用初始条件,得

$$a_{lmn}=\frac{8}{abd}\int_0^a\int_0^b\int_0^d f(x,y,z)\cdot\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{d}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

9.9 氢 原 子

我们现在要解一个量子力学中的基本问题——氢原子问题. 氢原子是由一个核和一个电子组成的. 这个电荷为 $-e$ 的质量为 m^* 的电子被一个电荷为 e 而质量大得多的核所吸引,其势能为

$$V=-\frac{e^2}{r},\tag{9.9.1}$$

这里 r 是电子到核的中心的距离. 一个在三维空间中运动的单粒子,它的与时间有关的波函数 ψ 是由薛定谔方程

$$\frac{\mathrm{i}h}{2\pi}\psi_t=\frac{-h^2}{8\pi^2m^*}\nabla^2\psi+V\psi\tag{9.9.2}$$

来描述的,其中 h 是普朗克常数, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

假设解的形式为

$$\psi(x,y,z,t)=F(x,y,z)T(t).$$

把这样的解代入方程(9.9.2),得到

$$T'+\frac{2\pi\mathrm{i}\lambda}{h}T=0,\tag{9.9.3}$$

$$\nabla^2 F - \frac{8\pi^2 m^*}{h^2}(V - \lambda)F = 0, \tag{9.9.4}$$

其中 λ 是分离常数. 对 T 的方程求积分,得到

$$T(t) = Ae^{-\frac{2\pi i\lambda t}{h}},$$

其中 A 是任意常数.

为了在空间内的某一个地方可找到这个粒子的概率等于1,要求 ψ 满足条件

$$\iiint |\psi|^2 d\tau = 1, \tag{9.9.5}$$

其中积分区域是整个空间.

因此,薛定谔方程的解是

$$\psi(x,y,z,t) = F(x,y,z)e^{-\frac{2\pi i\lambda t}{h}}, \tag{9.9.6}$$

这里为了标准化,取 A 为1. 因为方程(9.9.4)是齐次的,所以这样做是允许的.

为了确定函数 F,我们为方便起见引进球坐标①. 这时方程(9.9.4)在球坐标系中变为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + \left(a + \frac{b}{r}\right)F = 0, \tag{9.9.7}$$

其中 $a = 8\pi^2 m^*\lambda/h^2, b = 8\pi^2 m^* e^2/h^2$.

再用分离变量法,假设

$$F(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi),$$

于是分离变量后,得到下面三个常微分方程:

$$r^2R'' + 2rR' + \left[\left(a + \frac{b}{r}\right)r^2 - \mu\right]R = 0, \tag{9.9.8}$$

$$\Theta'' - \nu\Theta = 0, \tag{9.9.9}$$

$$\sin^2\varphi\Phi'' + \sin\varphi\cos\varphi\Phi' + (\mu\sin^2\varphi + \nu)\Phi = 0, \tag{9.9.10}$$

其中 μ 和 ν 都是分离常数.

为了使函数 $\Theta(\theta)$ 是单值的,要求它具有周期 2π,所以 ν 必须是零或 $-m^2$,其中 $m = 1,2,3,\cdots$. 因此得到的解为 $1, e^{-im\theta}, e^{im\theta}$. 我们也可把解写成

---

① 这里的直角坐标 x, y, z 用球坐标 r、θ, φ 表示的关系式为 $x = r\sin\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\varphi$.

下列形式:

$$\Theta_m(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\theta},\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

在上式中引进因子 $1/\sqrt{2\pi}$,是为了使函数系 $\Theta_m(\theta)$标准化.这时常数 m 称为磁量子数.但应注意不要把 m 与前面用的质量符号 m^* 相混淆.

然后考察下列方程的解:

$$\sin^2\varphi\,\Phi''+\sin\varphi\cos\varphi\,\Phi'+(\mu\sin^2\varphi-m^2)\Phi=0.$$

如果我们现在引进

$$z=\cos\varphi,$$

它在 -1 和 1 之间变化,那么 $\Phi(z)$的方程具有下列形式:

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{d\Phi}{dz}\right]+\left(\mu-\frac{m^2}{1-z^2}\right)\Phi=0.\qquad(9.9.11)$$

对于某些 μ 值,上述方程存在的惟一解是级数解,它在 $z=\pm1$ 处发散.为了使 Φ 在端点处连续,解在这两个点上必须是有限的.

如果 $\mu=l(l+1)$,其中 l 是正整数或零,方程(9.9.11)是连带勒让德方程,它的两个线性无关的解是 $P_l^m(z)$和 $Q_l^m(z)$.因为 $Q_l^m(z)$在 $z=\pm1$ 处为无穷大,所以现在只能取解

$$\Phi_{lm}(z)=\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}}P_l^m(z).$$

这里我们这样选择常数,是为了使函数系 $\Phi_{lm}(z)$标准化,l 称为角量子数.

注意当 $m=0$ 时,方程(9.9.11)是勒让德方程,这时勒让德多项式 $P_l(z)$是解.因为勒让德多项式 $P_l(z)$与连带勒让德函数 $P_l^m(z)$的关系是

$$P_l^m(z)=(1-z^2)^{m/2}\frac{d^mP_l(z)}{dz^m},$$

由此可见当 $m>l$ 时,$P_l^m(z)$等于零.至于对负整数 m 的情况可以不必考虑.因为

$$P_l^{-m}(z)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(z),$$

所以函数 $P_l^{-m}(z)$与函数 $P_l^m(z)$的不同仅在于相差常数因子,因此我们可把 m 限制为正整数或零.

为了求出 $R(r)$,把方程(9.9.8)除以 r^2,得到

$$R''+\frac{2R'}{r}+\left[a+\frac{b}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0.$$

引进新常数

$$n = b/(2\sqrt{-a})$$

和新变量

$$\zeta = 2\sqrt{-a}r,$$

可得到方程

$$\frac{d^2R}{d\zeta^2} + \frac{2}{\zeta}\frac{dR}{d\zeta} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{n}{\zeta} - \frac{l(l+1)}{\zeta^2}\right]R = 0. \qquad (9.9.12)$$

为了使 $R(\zeta)$ 对实的 n 在 $\zeta=0$ 处与当 $\zeta\to\infty$ 时都保持有限，n 的整数值必须大于 l，n 称为总量子数. 这时，方程(9.9.12)的解是

$$R_{ln}(\zeta) = -\sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}}e^{-\zeta/2}\zeta^l L_{n+l}^{2l+1}(\zeta)$$

$$(l = 0,1,2,\cdots,n-1), \qquad (9.9.13)$$

其中 $a_0 = h^2/4\pi^2 m^* e^2$，$L_{n+l}^{2l+1}(\zeta)$ 是连带拉盖尔函数. 我们在上式中这样选择常数，是因为连带拉盖尔函数有下列的标准化积分公式：

$$\int_0^\infty e^{-\zeta}\zeta^{2l}[L_{n+l}^{2l+1}(\zeta)]^2\zeta^2 d\zeta = \frac{2n[(n+l)!]^3}{(n-l-1)!},$$

其中因子 ζ^2 是由球坐标系中的体积元素引起的. 在式(9.9.13)中选取负号，是要使 $R(\zeta)$ 当 r 很小时取正值.

因此，氢原子的波函数是

$$\psi_{lmn}(r,\theta,\varphi) = R_{ln}(r)\Theta_m(\theta)\Phi_{lm}(\varphi), \qquad (9.9.14)$$

其中

$$\begin{cases} R_{ln}(r) = -\sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}}e^{-\zeta/2}\zeta^l L_{n+l}^{2l+1}(\zeta), \\ \zeta = 2\sqrt{-a}r, \\ \Phi_{lm}(\varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}}P_l^n(\cos\varphi), \\ \Theta_m(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\theta}. \end{cases} \qquad (9.9.15)$$

9.10　用本征函数法解非齐次问题

考察非齐次方程

$$L[u] = \rho u_{tt} - G,\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D, t>0, \qquad (9.10.1)$$

在区域 D 的边界 B 上带有给定的齐次边界条件及下列初始条件的初边值问题：

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_n,0) = f(x_1,x_2,\cdots,x_n), \tag{9.10.2}$$

$$u_t(x_1,x_2,\cdots,x_n,0) = g(x_1,x_2,\cdots,x_n). \tag{9.10.3}$$

这里 $\rho(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是空间变量正的实值连续函数,而 $G(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$ 是实值连续函数.

假设相应齐次方程

$$L[u] = \rho u_{tt} \tag{9.10.4}$$

满足给定的齐次定解条件的惟一解是零解,那么如果已知的定解问题存在一个解,这个解就可以用和它所对应的方程

$$L[\varphi] + \lambda\rho\varphi = 0 \tag{9.10.5}$$

满足给定的齐次边界条件的本征函数系的级数来表示.

9.11 膜的受迫振动

作为一个特例,我们将确定一长为 a,宽为 b 的矩形膜的受迫振动问题的解.这个定解问题是

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\nabla^2 u = F(x,y,t), \quad 0 < x < a, & (9.11.1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 < y < b, t > 0, & \\ u(x,y,0) = f(x,y), & (9.11.2) \\ u_t(x,y,0) = g(x,y), & (9.11.3) \\ u(0,y,t) = 0, & (9.11.4) \\ u(a,y,t) = 0, & (9.11.5) \\ u(x,0,t) = 0, & (9.11.6) \\ u(x,b,t) = 0. & (9.11.7) \end{cases}$$

它所对应的本征值问题是

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi + \lambda\varphi = 0, \quad 0 < x < a, 0 < y < b, \\ \varphi(0,y) = 0, \quad \varphi(a,y) = 0, \\ \varphi(x,0) = 0, \quad \varphi(x,b) = 0. \end{cases}$$

根据 9.5 节,这个本征值问题的本征值是

$$\alpha_{mn}^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}, m, n = 1,2,3,\cdots,$$

而对应的本征函数是

$$\varphi_{mn}(x,y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

于是,假设解为

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

而把函数 $F(x,y,t)$ 展开为

$$F(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

这里 $F_{mn}(t)$ 为

$$F_{mn}(t)=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b F(x,y,t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意,这个解 u 满足齐次边界条件是显然的.现在假设 u 对 x,y 和 t 都是逐项二次可微的,把 $u(x,y,t)$ 和 $F(x,y,t)$ 代入方程(9.11.1),得到

$$u''_{mn}+c^2\alpha_{mn}^2u_{mn}=F_{mn},$$

其中 $\alpha_{mn}^2=(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2$.于是上述常微分方程的解具有下列形式:

$$u_{mn}(t)=A_{mn}\cos\alpha_{mn}ct+B_{mn}\sin\alpha_{mn}ct$$

$$+\frac{1}{\alpha_{mn}c}\int_0^t F_{mn}(\tau)\sin\alpha_{mn}c(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

由初始条件(9.11.2)可得

$$u(x,y,0)=f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

假设函数 $f(x,y)$ 对 x 和 y 是连续的,那么上面这个二重傅里叶级数的系数 A_{mn} 为

$$A_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

同样,由剩下的初始条件(9.11.3),我们有

$$u_t(x,y,0)=g(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\alpha_{mn}c\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

因此对连续的 $g(x,y)$,得到

$$B_{mn}=\frac{4}{ab\alpha_{mn}c}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所以已知的初边值问题的解是

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

这里假定 u 的级数与它的一阶及二阶导数都一致收敛.

如果 $F(x,y,t)=\mathrm{e}^{x+y}\cos\omega t$, $f(x,y)=g(x,y)=0$,那么

$$F_{mn}(t)=\frac{4mn\pi^2}{(m^2\pi^2+a^2)(n^2\pi^2+b^2)}$$

$$\cdot[1+(-1)^{m+1}\mathrm{e}^a][1+(-1)^{n+1}\mathrm{e}^b]\cos\omega t$$

$$= C_{mn}\cos\omega t,$$

$$A_{mn} = B_{mn} = 0.$$

因此,我们有

$$u_{mn}(t) = \frac{1}{\alpha_{mn}c}\int_0^t C_{mn}\cos\omega\tau\sin\alpha_{mn}c(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{C_{mn}}{(\alpha_{mn}^2c^2-\omega^2)}(\cos\omega t - \cos\alpha_{mn}ct),$$

这里假定 $\omega \neq \alpha_{mn}c$. 于是形式解可写成下列形式:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{mn}}{(\alpha_{mn}^2c^2-\omega^2)}(\cos\omega t - \cos\alpha_{mn}ct) \cdot \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

9.12 与时间有关的边界条件

前面几章已经专门讨论了带有齐次边界条件的定解问题. 由于实际上会出现带有与时间有关的边界条件的定解问题,所以我们来考察边界可移动的矩形膜的受迫振动问题. 这个问题是要确定下列定解问题的位移函数 u:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\nabla^2 u = F(x,y,t), \quad 0<x<a, & (9.12.1) \\ \qquad\qquad 0<y<b, t>0, & \\ u(x,y,0) = f(x,y), \quad 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b, & (9.12.2) \\ u_t(x,y,0) = g(x,y), \quad 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b, & (9.12.3) \\ u(0,y,t) = p_1(y,t), \quad 0\leqslant y\leqslant b, t>0, & (9.12.4) \\ u(a,y,t) = p_2(y,t), \quad 0\leqslant y\leqslant b, t>0, & (9.12.5) \\ u(x,0,t) = q_1(x,t), \quad 0\leqslant x\leqslant a, t>0, & (9.12.6) \\ u(x,b,t) = q_2(x,t), \quad 0\leqslant x\leqslant a, t>0. & (9.12.7) \end{cases}$$

对于这种定解问题,我们找下列形式的解:

$$u(x,y,t) = U(x,y,t) + v(x,y,t), \qquad (9.12.8)$$

其中 v 是要确定的新函数. 在求出 v 之前,我们必须先确定 U. 如果把式(9.12.8)代入式(9.12.1)~(9.12.7),就分别得到方程

$$v_{tt} - c^2(v_{xx}+v_{yy}) = F - U_{tt} + c^2(U_{xx}+U_{yy}) = \widetilde{F}(x,y,t)$$

和定解条件

$$v(x,y,0) = f(x,y) - U(x,y,0) = \widetilde{f}(x,y),$$

$$v_t(x,y,0) = g(x,y) - U_t(x,y,0) = \widetilde{g}(x,y),$$
$$v(0,y,t) = p_1(y,t) - U(0,y,t) = \widetilde{p}_1(y,t),$$
$$v(a,y,t) = p_2(y,t) - U(a,y,t) = \widetilde{p}_2(y,t),$$
$$v(x,0,t) = q_1(x,t) - U(x,0,t) = \widetilde{q}_1(x,t),$$
$$v(x,b,t) = q_2(x,t) - U(x,b,t) = \widetilde{q}_2(x,t).$$

为了使 v 的边界条件是齐次的,令

$$\widetilde{p}_1 = \widetilde{p}_2 = \widetilde{q}_1 = \widetilde{q}_2 = 0,$$

那么

$$\begin{cases} U(0,y,t) = p_1(y,t), U(a,y,t) = p_2(y,t), \\ U(x,0,t) = q_1(x,t), U(x,b,t) = q_2(x,t). \end{cases} \tag{9.12.9}$$

为了使边界条件是相容的,我们假设给定的函数具有下列形式:

$$\begin{cases} p_1(y,t) = \varphi(y)p_1^*(y,t), \\ p_2(y,t) = \varphi(y)p_2^*(y,t), \\ q_1(x,t) = \psi(x)q_1^*(x,t), \\ q_2(x,t) = \psi(x)q_2^*(x,t), \end{cases} \tag{9.12.10}$$

其中函数 φ 在端点 $y=0, y=b$ 处等于零,而函数 ψ 在端点 $x=0, x=a$ 处等于零.因此,满足条件(9.12.9)的 $U(x,y,t)$ 具有下列形式:

$$U(x,y,t) = \varphi(y)\left[p_1^* + \frac{x}{a}(p_2^* - p_1^*)\right] + \psi(x)\left[q_1^* + \frac{y}{b}(q_2^* - q_1^*)\right].$$

这样,问题简化为求下面定解问题的解 $v(x,y,t)$:

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2(v_{xx} + v_{yy}) = \widetilde{F}(x,y,t), \\ v(x,y,0) = \widetilde{f}(x,y), \\ v_t(x,y,0) = \widetilde{g}(x,y), \\ v(0,y,t) = 0, v(a,y,t) = 0, \\ v(x,0,t) = 0, v(x,b,t) = 0. \end{cases}$$

这个定解问题是一个具有齐次边界条件的初边值问题,解 $v(x,y,t)$ 可以用前面已经讨论过的方法解出.

作为一个特殊情形,考察下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \\ u(x,y,0) = 0, u_t(x,y,0) = 0, \\ u(0,y,t) = 0, u(a,y,t) = 0, \\ u(x,0,t) = 0, u(x,b,t) = \sin\dfrac{\pi x}{a}\sin t. \end{cases}$$

设解的形式为

$$u(x,y,t) = v(x,y,t) + U(x,y,t),$$

那么满足条件

$$\begin{aligned} &U(0,y,t) = 0, \\ &U(a,y,t) = 0, \\ &U(x,0,t) = 0, \\ &U(x,b,t) = \sin\frac{\pi x}{a}\sin t \end{aligned}$$

的函数是

$$U(x,y,t) = \sin\frac{\pi x}{a}\left(\frac{y}{b}\sin t\right).$$

因此要解的新定解问题是

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2(v_{xx} + v_{yy}) = \left(1 - \dfrac{c^2\pi^2}{a^2}\right)\dfrac{y}{b}\sin\dfrac{\pi x}{a}\sin t, \\ v(x,y,0) = 0, \\ v_t(x,y,0) = -\dfrac{y}{b}\sin\dfrac{\pi x}{a}, \\ v(0,y,t) = 0, v(a,y,t) = 0, \\ v(x,0,t) = 0, v(x,b,t) = 0. \end{cases}$$

然后由下式求 $F_{mn}(t)$：

$$F_{mn}(t) = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b F(x,y,t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中

$$F(x,y,t) = \left(1 - \frac{c^2\pi^2}{a^2}\right)\frac{y}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\sin t.$$

由此可得

$$F_{mn}(t) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\left(1 - \frac{c^2\pi^2}{a^2}\right)\sin t\,\delta_{m1}.$$

现在来确定 $v_{mn}(t)$. 利用上一节的结果，得到

$$v_{mn}(t) = A_{mn}\cos\alpha_{mn}ct + B_{mn}\sin\alpha_{mn}ct$$

$$+\frac{1}{\alpha_{mn}c}\int_0^t F_{mn}(\tau)\sin\alpha_{mn}c(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

因为 $v(x,y,0)=0$,所以 $A_{mn}=0$,而

$$B_{mn}=\frac{4}{ab\alpha_{mn}c}\int_0^a\int_0^b\left(-\frac{y}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2(-1)^n}{\alpha_{mn}cn\pi}\delta_{m1}.$$

于是,我们有

$$v_{mn}(t)=\frac{2(-1)^n\delta_{m1}}{\alpha_{mn}cn\pi}\sin\alpha_{mn}ct+\frac{2(-1)^n\delta_{m1}}{\alpha_{mn}ca^2n\pi(1-\alpha_{mn}^2c^2)}\cdot(a^2-c^2\pi^2)(\sin\alpha_{mn}ct-\alpha_{mn}c\sin t).$$

因此所求的解是

$$u(x,y,t)=\frac{y}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\sin t+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}v_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

习 题

1. 解狄利克莱问题

$$\begin{cases}\nabla^2u=0,0<x<a,0<y<b,0<z<c,\\ u(0,y,z)=\sin\frac{\pi y}{b}\sin\frac{\pi z}{c},u(a,y,z)=0,\\ u(x,0,z)=0,u(x,b,z)=0,\\ u(x,y,0)=0,u(x,y,c)=0.\end{cases}$$

2. 解诺依曼问题

$$\begin{cases}\nabla^2u=0,0<x<1,0<y<1,0<z<1,\\ u_x(0,y,z)=0,u_x(1,y,z)=0,\\ u_y(x,0,z)=0,u_y(x,1,z)=0,\\ u_z(x,y,0)=\cos\pi x\cos\pi y,u_z(x,y,1)=0.\end{cases}$$

3. 解劳平问题

$$\begin{cases}\nabla^2u=0,0<x<\pi,0<y<\pi,0<z<\pi,\\ u(0,y,z)=f(y,z),u(\pi,y,z)=0,\\ u_y(x,0,z)=0,u_y(x,\pi,z)=0,\\ u_z(x,y,0)-hu(x,y,0)=0,u_z(x,y,\pi)+hu(x,y,\pi)=0,\end{cases}$$

其中 h 是常数.

4. 确定下列圆柱体的边值问题的解:

$$
\text{(a)}\begin{cases}\nabla^2 u=0, r<a, 0<\theta<2\pi, 0<z<l,\\ u(a,\theta,z)=0,\\ u(r,\theta,l)=0,\\ u(r,\theta,0)=f(r,\theta);\end{cases}
$$

$$
\text{(b)}\begin{cases}\nabla^2 u=0, r<a, 0<\theta<2\pi, 0<z<l,\\ u(a,\theta,z)=f(\theta,z),\\ u_z(r,\theta,0)=0,\\ u_z(r,\theta,l)=0.\end{cases}
$$

5. 求下列球的狄利克莱问题的解：

$$
\begin{cases}\nabla^2 u=0, r<a, 0<\theta<\pi, 0<\varphi<2\pi,\\ u(a,\theta,\varphi)=\cos^2\theta.\end{cases}
$$

6. 解同心球的狄利克莱问题

$$
\begin{cases}\nabla^2 u=0, a<r<b, 0<\theta<\pi, 0<\varphi<2\pi,\\ u(a,\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi),\\ u(b,\theta,\varphi)=g(\theta,\varphi).\end{cases}
$$

7. 一半径为 a 的圆柱体，如果在下底 $z=0$ 上有恒定热流 T 进入，而在上底 $z=l$ 和侧面 $r=a$ 上温度都保持零度，求柱体内稳恒状态的温度分布.

8. 设高为 l 半径为 a 的圆柱体的两底接地，而侧面充电到电势 u_0. 求柱体内静电场的电势.

9. 一半径为 a 的球，如果上半球充电到电势 u_1，下半球充电到电势 u_2，试确定球内电场中的电势.

10. 解半圆柱体的狄利克莱问题

$$
\begin{cases}\nabla^2 u=0, r<1, 0<\theta<\pi, 0<z<1,\\ u(1,\theta,z)=0,\\ u(r,0,z)=0, u(r,\pi,z)=0,\\ u(r,\theta,0)=0, u(r,\theta,1)=f(r,\theta).\end{cases}
$$

11. 解球的诺依曼问题

$$
\begin{cases}\nabla^2 u=0, r<1, 0<\theta<\pi, 0<\varphi<2\pi,\\ u_r(1,\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi),\end{cases}
$$

其中 $f(\theta,\varphi)$ 满足条件

$$
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=0.
$$

12. 求下列初边值问题的解：

$$
\begin{cases}u_{tt}=c^2\nabla^2 u, 0<x<1, 0<y<1, t>0,\\ u(x,y,0)=\sin^2\pi x\sin\pi y,\\ u_t(x,y,0)=0,\\ u(0,y,t)=0, u(1,y,t)=0,\\ u(x,0,t)=0, u(x,1,t)=0.\end{cases}
$$

13. 求下列定解问题的解：

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\nabla^2 u, r < a, 0 < \theta < 2\pi, t > 0, \\ u(r,\theta,0) = f(r,\theta), \\ u_t(r,\theta,0) = g(r,\theta), \\ u(a,\theta,t) = 0. \end{cases}$$

14. 一矩形薄板有热量从表面上散发出去，边界上温度保持零度，初始温度分布已知为 $f(x,y)$，求板上的温度分布．这时，板上的温度分布由下列定解问题描述：

$$\begin{cases} u_t = k(u_{xx} + u_{yy}) - h(u - u_0), 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0, \\ u(x,y,0) = f(x,y), \\ u(0,y,t) = 0, u(a,y,t) = 0, \\ u(x,0,t) = 0, u(x,b,t) = 0, \end{cases}$$

其中 u_0 是常数．

15. 解圆形薄板的热传导问题

$$\begin{cases} u_t = k\left(u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right), r < 1, 0 < \theta < 2\pi, t > 0, \\ u(r,\theta,0) = f(r,\theta), \\ u(1,\theta,t) = 0. \end{cases}$$

16. 解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\nabla^2 u, 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1, t > 0, \\ u(x,y,z,0) = \sin\pi x\sin\pi y\sin\pi z, \\ u_t(x,y,z,0) = 0, \\ u(0,y,z,t) = u(1,y,z,t) = 0, \\ u(x,0,z,t) = u(x,1,z,t) = 0, \\ u(x,y,0,t) = u(x,y,1,t) = 0. \end{cases}$$

17. 解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} + ku_t = c^2\nabla^2 u, 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < d, t > 0, \\ u(x,y,z,0) = f(x,y,z), \\ u_t(x,y,z,0) = g(x,y,z), \\ u(0,y,z,t) = u(a,y,z,t) = 0, \\ u(x,0,z,t) = u(x,b,z,t) = 0, \\ u(x,y,0,t) = u(x,y,d,t) = 0. \end{cases}$$

18. 求下列定解问题的解：

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\left(u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz}\right), r < a, 0 < z < l, t > 0, \\ u(r,\theta,z,0) = f(r,\theta,z), \\ u_t(r,\theta,z,0) = g(r,\theta,z), \\ u(a,\theta,z,t) = 0, \\ u(r,\theta,0,t) = u(r,\theta,l,t) = 0. \end{cases}$$

19. 确定下列热传导问题的解：

$$\begin{cases} u_t = k\nabla^2 u, 0<x<a, 0<y<b, 0<z<c, t>0, \\ u(x,y,z,0) = f(x,y,z), \\ u_x(0,y,z,t) = u_x(a,y,z,t) = 0, \\ u_y(x,0,z,t) = u_y(x,b,z,t) = 0, \\ u_z(x,y,0,t) = u_z(x,y,c,t) = 0. \end{cases}$$

20. 解定解问题

$$\begin{cases} u_t = k\nabla^2 u, r<a, 0<z<l, t>0, \\ u(r,\theta,z,0) = f(r,\theta,z), \\ u_r(a,\theta,z,t) = 0, \\ u(r,\theta,0,t) = u(r,\theta,l,t) = 0. \end{cases}$$

21. 设一球被圆锥 $\theta=\theta_0$ 所截下部分的表面温度是零度，初始温度为 $f(r,\theta,\varphi)$，求其温度分布.

22. 解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\nabla^2 u + F(x,y,t), 0<x<a, 0<y<b, t>0, \\ u(x,y,0) = f(x,y), \\ u_t(x,y,0) = g(x,y), \\ u_x(0,y,t) = u_x(a,y,t) = 0, \\ u_y(x,0,t) = u_y(x,b,t) = 0. \end{cases}$$

23. 解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\nabla^2 u + xy\sin t, 0<x<\pi, 0<y<\pi, t>0, \\ u(x,y,0) = 0, \\ u_t(x,y,0) = 0, \\ u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = 0, \\ u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0. \end{cases}$$

24. 解定解问题

$$\begin{cases} u_t = k\nabla^2 u + F(x,y,z,t), 0<x<a, 0<y<b, 0<z<c, t>0, \\ u(x,y,z,0) = f(x,y,z), \\ u(0,y,z,t) = u(a,y,z,t) = 0, \\ u(x,0,z,t) = u(x,b,z,t) = 0, \\ u_z(x,y,0,t) = u_z(x,y,c,t) = 0. \end{cases}$$

25. 解定解问题

$$\begin{cases} u_t = k\nabla^2 u + A, 0<x<\pi, 0<y<\pi, t>0, \\ u(x,y,0) = 0, \\ u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = 0, \\ u_y(x,0,t) - u(x,0,t) = 0, \\ u_y(x,\pi,t) + u(x,\pi,t) = 0, \end{cases}$$

其中 A 是常数.

26. 设一个空心圆柱体的内外两个柱面的半径分别为 r_0 和 a,表面温度保持零度,初始温度分布为 $f(r,\theta,z)$,求柱体内的温度分布.

27. 解初边值问题

$$\begin{cases} u_t - c^2\nabla^2 u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, t > 0, \\ u(x,y,0) = 0, \\ u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = 0, \\ u(x,0,t) = x(x-\pi)\sin t, \\ u(x,\pi,t) = 0. \end{cases}$$

28. 解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\nabla^2 u, r < a, t > 0, \\ u(r,\theta,0) = f(r,\theta), \\ u_t(r,\theta,0) = g(r,\theta), \\ u(a,\theta,t) = p(\theta,t). \end{cases}$$

29. 解定解问题

$$\begin{cases} u_t = c^2\nabla^2 u, r < a, t > 0, \\ u(r,\theta,0) = f(r,\theta), \\ u_r(a,\theta,t) = g(\theta,t). \end{cases}$$

30. 确定双调和方程

$$\nabla^4 u = q/D$$

满足下列边界条件的解:

$$u\left(-\frac{a}{2},y\right) = u\left(\frac{a}{2},y\right) = 0,$$

$$u_{xx}\left(-\frac{a}{2},y\right) = u_{xx}\left(\frac{a}{2},y\right) = 0,$$

$$u(x,0) = u(x,b) = 0,$$

$$u_{yy}(x,0) = u_{yy}(x,b) = 0,$$

其中 q 是每单位面积上的均匀负载,D 是板的弯曲刚度.这是一个均匀加载的弹性薄板的弯曲问题,其四边都是简支的.

第十章　格林函数法

10.1　δ 函　数

在前面第七章中，我们已讨论了格林函数在常微分方程边值问题中的应用.本章要介绍格林函数法在各种偏微分方程边值问题中的应用.这个方法可把偏微分方程定解问题的解表示为积分的形式，它适用于范围很广的数学物理问题.

在介绍格林函数法前，我们首先定义二维狄拉克 δ 函数 $\delta(x-\xi,y-\eta)$ 如下：

(a)　$\delta(x-\xi,y-\eta)=0,x\neq\xi,y\neq\eta;$　(10.1.1)

(b)　$\iint\limits_{R_\varepsilon}\delta(x-\xi,y-\eta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1,$

其中

$$R_\varepsilon:(x-\xi)^2+(y-\eta)^2<\varepsilon^2; \tag{10.1.2}$$

(c)　$\iint\limits_{R}F(x,y)\delta(x-\xi,y-\eta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=F(\xi,\eta),$　(10.1.3)

其中 F 是区域 R 上的任意连续函数.

δ 函数不是通常意义下的函数，它是一个符号函数并经常看作是分布的极限.

如果 $\delta(x-\xi)$ 和 $\delta(y-\eta)$ 都是一维 δ 函数，那么我们有

$$\iint\limits_{R}F(x,y)\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=F(\xi,\eta). \tag{10.1.4}$$

因为式(10.1.3)和(10.1.4)对任意连续函数 F 都成立，因此可得

$$\delta(x-\xi,y-\eta)=\delta(x-\xi)\delta(y-\eta). \tag{10.1.5}$$

于是我们可以说，二维 δ 函数是两个一维 δ 函数的乘积.

同样，可定义高维 δ 函数.

10.2　格林函数

狄利克莱问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u = h(x,y), & \text{在区域 } D \text{ 内}, \\ u = f(x,y), & \text{在边界 } B \text{ 上}\end{cases} \tag{10.2.1}$$

的解为[1]

$$u(x,y) = \iint_D G(x,y;\xi,\eta)h(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \int_B f\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s, \tag{10.2.2}$$

其中 G 是格林函数,n 表示区域D 的边界B 的外法线.很显然,我们只要一确定格林函数,便可立刻得到定解问题的解 u.所以在格林函数法中,实际上是要求出问题的格林函数.

首先,我们将定义含有拉普拉斯算子的狄利克莱问题的格林函数.然后,含有亥姆霍兹算子的狄利克莱问题的格林函数也可用完全类似的方法来加以定义.

含有拉普拉斯算子的狄利克莱问题的格林函数是满足下列性质的函数:

(a)
$$\begin{cases}\nabla^2 G = \delta(x-\xi, y-\eta), & \text{在 } D \text{ 内}, & (10.2.3)\\ G = 0, & \text{在 } B \text{ 上}; & (10.2.4)\end{cases}$$

(b) 函数 G 是对称的,即

$$G(x,y;\xi,\eta) = G(\xi,\eta;x,y); \tag{10.2.5}$$

(c)函数 G 对 x,y,ξ,η 是连续的,但$\dfrac{\partial G}{\partial n}$在点$(x,y)=(\xi,\eta)$处有间断性,并满足等式

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s = 1, \tag{10.2.6}$$

其中 n 是圆

$$C_\varepsilon: (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \varepsilon^2$$

的外法线.

格林函数在物理上可以解释为当一个系统的输入为在源点[2](ξ,η)处的 δ 函数后,在场中任一点(x,y)上所产生的响应.函数 G 在D 内是处处连续的,而它的一阶导数和二阶导数在 G 内除点(ξ,η)外都是连续的.因此性质(a)主要说明函数 G 除源点(ξ,η)外处处满足方程$\nabla^2 G=0$.

我们现在来证明性质(b).

定理 10.2.1　格林函数是对称的.

---

① 证明将在 10.4 节中给出.

② 点源所在的点称为源点.

证明 把格林第二公式[①]

$$\iint_D (\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)\mathrm{d}S = \int_B\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}s \qquad (10.2.7)$$

应用在函数 $\varphi = G(x,y;\xi,\eta)$ 和 $\psi = G(x,y;\xi^*,\eta^*)$ 上,得到

$$\begin{aligned}&\iint_D [G(x,y;\xi,\eta)\nabla^2 G(x,y;\xi^*,\eta^*)\\&- G(x,y;\xi^*,\eta^*)\nabla^2 G(x,y;\xi,\eta)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\int_B\Big[G(x,y;\xi,\eta)\frac{\partial G}{\partial n}(x,y;\xi^*,\eta^*)\\&- G(x,y;\xi^*,\eta^*)\frac{\partial G}{\partial n}(x,y;\xi,\eta)\Big]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因为 $G(x,y;\xi,\eta)$ 和 $G(x,y;\xi^*,\eta^*)$ 在 B 上都必须等于零,所以我们有

$$\begin{aligned}&\iint_D [G(x,y;\xi,\eta)\nabla^2 G(x,y;\xi^*,\eta^*)\\&\quad - G(x,y;\xi^*,\eta^*)\nabla^2 G(x,y;\xi,\eta)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

但

$$\nabla^2 G(x,y;\xi,\eta) = \delta(x-\xi,y-\eta)$$

和

$$\nabla^2 G(x,y;\xi^*,\eta^*) = \delta(x-\xi^*,y-\eta^*),$$

又因为

$$\begin{aligned}&\iint_D G(x,y;\xi,\eta)\delta(x-\xi^*,y-\eta^*)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&G(\xi^*,\eta^*;\xi,\eta)\end{aligned}$$

和

$$\iint_D G(x,y;\xi^*,\eta^*)\delta(x-\xi,y-\eta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = G(\xi,\eta;\xi^*,\eta^*),$$

所以得到

$$G(\xi,\eta;\xi^*,\eta^*) = G(\xi^*,\eta^*;\xi,\eta).$$

本定理证毕.

定理 10.2.2 $\partial G/\partial n$ 在点(ξ,η)处是间断的,特别是

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon}\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s = 1, \text{其中 } C_\epsilon:(x-\xi)^2+(y-\eta)^2 = \epsilon^2.$$

---

① 对于一般的两个变量的二阶微分算子的格林公式见本章习题 1.

证明　设 R_ε 是以 C_ε 为边界的区域，那么把等式(10.2.3)的两边积分，得到

$$\iint_{R_\varepsilon} \nabla^2 G\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{R_\varepsilon} \delta(x-\xi, y-\eta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

从而

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\iint_{R_\varepsilon} \nabla^2 G\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1. \tag{10.2.8}$$

于是由散度定理，得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s = 1.$$

本定理证毕.

10.3　格林函数法

为了找出格林函数 G，把 G 作为非齐次方程的特解与相应齐次方程的一个解的和是方便的.也就是说，假设 G 的形式为①

$$G(\xi,\eta;x,y) = F(\xi,\eta;x,y) + g(\xi,\eta;x,y), \tag{10.3.1}$$

其中 F 满足方程

$$\nabla^2 F = \delta(\xi - x, \eta - y)\text{，在 } D \text{ 内，} \tag{10.3.2}$$

称为自由空间格林函数，而 g 满足方程

$$\nabla^2 g = 0\text{，在 } D \text{ 内.} \tag{10.3.3}$$

根据叠加原理，$G=F+g$ 满足方程

$$\nabla^2 G = \delta(\xi - x, \eta - y)\text{，在 } D \text{ 内，}$$

而且在 B 上 $G=0$，要求 g 满足边界条件

$$g = -F\text{，在 } B \text{ 上.} \tag{10.3.4}$$

注意，这里 F 不需要满足边界条件.

在我们确定一个特殊的边值问题的解之前，让我们先对拉普拉斯算子和亥姆霍兹算子来求出函数 F.

1. 拉普拉斯算子

在这种情况下，函数 F 必须满足方程

$$\nabla^2 F = \delta(\xi - x, \eta - y)\text{，在 } D \text{ 内.}$$

那么对 $r=[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^{1/2}>0$，即对 $\xi\neq x$ 或 $\eta\neq y$，由于取(x,y)为

① 今后，(x,y)将表示源点.

中心,且 F 与 θ 无关,我们有

$$\nabla^2 F = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) = 0.$$

因此,这个方程的解是

$$F = A + B\lg r.$$

利用条件(10.2.6),得到①

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial n}\mathrm{d}s = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{B}{r}r\mathrm{d}\theta = 1.$$

所以 $B=1/2\pi$,A 是任意常数.为简单起见,我们选取 $A=0$,于是 F 具有下列形式:

$$F = \frac{1}{2\pi}\lg r. \tag{10.3.5}$$

2. 亥姆霍兹算子

这里要求 F 满足方程

$$\nabla^2 F + \kappa^2 F = \delta(x-\xi, y-\eta).$$

再对 $r>0$,解方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \kappa^2 F = 0$$

或

$$r^2F'' + rF' + x^2r^2F = 0.$$

这个常微分方程是零阶贝塞尔方程,它的解是

$$F(\kappa r) = A\mathrm{J}_0(\kappa r) + B\mathrm{Y}_0(\kappa r).$$

因为点 $r=0$ 不是 J_0 的奇点,所以令 $A=0$.于是,我们有

$$F(\kappa r) = B\mathrm{Y}_0(\kappa r).$$

但对很小的 r,有

$$\mathrm{Y}_0(\kappa r) \approx \frac{2}{\pi}\lg r.$$

利用条件(10.2.6),得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial n}\mathrm{d}s = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}B\frac{\partial \mathrm{Y}_0}{\partial r}\mathrm{d}s = 1,$$

因此,$B=1/4$.于是 $F(\kappa r)$变为

$$F(\kappa r) = \frac{1}{4}\mathrm{Y}_0(\kappa r). \tag{10.3.6}$$

---

① 这个结果可由式(10.2.8)直接得到,因为 $\nabla^2 y=0$.

可以指出,因为当 $\kappa\to 0$ 时,有

$$\nabla^2+\kappa^2\to\nabla^2,$$

所以应当得到(而且必须得到),当 $\kappa\to 0$ 时,有

$$\frac{1}{4}Y_0(\kappa r)\to\frac{1}{2\pi}\lg r.$$

10.4　拉普拉斯算子的狄利克莱问题

我们现在能用格林函数法来确定下列狄利克莱问题的解:

$$\begin{cases}\nabla^2 u=h, \text{在 } D \text{ 内},\\ u=f, \quad \text{在 } B \text{ 上}.\end{cases}\tag{10.4.1}$$

在式(10.2.7)中取 $\varphi(\xi,\eta)=G(\xi,\eta;x,y)$ 和 $\psi(\xi,\eta)=u(\xi,\eta)$,得到

$$\iint_D[G(\xi,\eta;x,y)\nabla^2 u-u(\xi,\eta)\nabla^2 G]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$
$$=\int_B\left[G(\xi,\eta;x,y)\frac{\partial u}{\partial n}-u(\xi,\eta)\frac{\partial G}{\partial n}\right]\mathrm{d}s.$$

但在 D 内,有

$$\nabla^2 u=h(\xi,\eta)$$

和

$$\nabla^2 G=\delta(\xi-x,\eta-y).$$

于是,我们有

$$\iint_D[G(\xi,\eta;x,y)h(\xi,\eta)-u(\xi,\eta)\delta(\xi-x,\eta-y)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$
$$=\int_B\left[G(\xi,\eta;x,y)\frac{\partial u}{\partial n}-u(\xi,\eta)\frac{\partial G}{\partial n}\right]\mathrm{d}s.\tag{10.4.2}$$

因为在 B 上,有 $G=0$ 和 $u=f$,且注意到 G 是对称的,由此可得

$$u(x,y)=\iint_D G(x,y;\xi,\eta)h(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$
$$+\int_B f\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s,\tag{10.4.3}$$

这就是我们在 10.2 节中已经注释过的解.

【例 10.4.1】 作为一个特例,考察 D 是单位圆的狄利克莱问题.那么,我们必须先解下列边值问题:

$$\begin{cases}\nabla^2 g=g_{\xi\xi}+g_{\eta\eta}=0, & \text{在 } D \text{ 内},\\ g=-F, & \text{在 } B \text{ 上}.\end{cases}\tag{10.4.4}$$

但是由式(10.3.5),我们已经得到 $F=(1/2\pi)\lg r$.

如果引进极坐标(见图 10.1)(ρ,θ)和(σ,β),即

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = \sigma\cos\beta, \\ \eta = \sigma\sin\beta, \end{cases} \tag{10.4.5}$$

那么问题(10.4.4)中的方程的解是(见第八章 8.4 节)

$$g = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\sigma^n(a_n\cos n\beta + b_n\sin n\beta),$$

其中

$$g = -\frac{1}{4\pi}\lg[1+\rho^2-2\rho\cos(\beta-\theta)],\text{在 } B \text{ 上}.$$

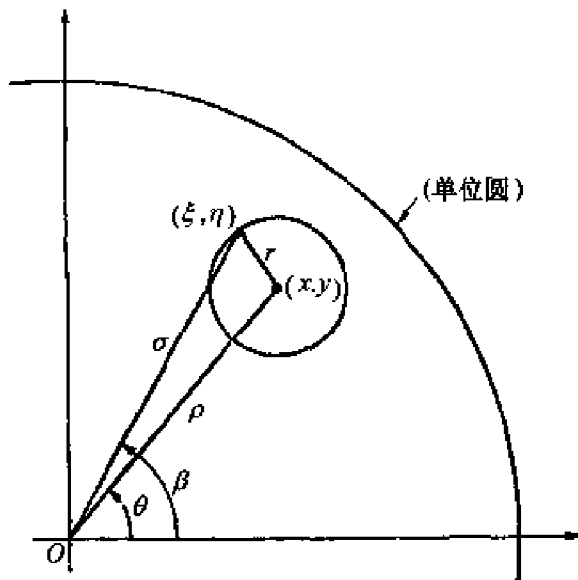


图 10.1

利用关系式

$$\lg[1+\rho^2-2\rho\cos(\beta-\theta)] = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n\cos n(\beta-\theta)}{n},$$

并使 $\sin n\beta$ 和 $\cos n\beta$ 的系数相等以确定 a_n 和 b_n,可求得

$$a_n = \frac{\rho^n}{2\pi n}\cos n\theta,$$

$$b_n = \frac{\rho^n}{2\pi n}\sin n\theta.$$

因此可得

$$g(\rho,\theta;\sigma,\beta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sigma\rho)^n}{n}\cos n(\beta-\theta)$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\lg[1+(\sigma\rho)^2-2(\sigma\rho)\cos(\beta-\theta)].$$

所以本问题的格林函数是

$$\begin{aligned}G(\rho,\theta;\sigma,\beta)&=\frac{1}{4\pi}\lg[\sigma^2+\rho^2-2\sigma\rho\cos(\beta-\theta)]\\&\quad-\frac{1}{4\pi}\lg[1+(\sigma\rho)^2-2\sigma\rho\cos(\beta-\theta)]\\&=\frac{1}{4\pi}\lg[\sigma^2+\rho^2-2\sigma\rho\cos(\beta-\theta)]\\&\quad-\frac{1}{4\pi}\lg\left[\frac{1}{\sigma^2}+\rho^2-\frac{2\rho}{\sigma}\cos(\beta-\theta)\right]\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{\sigma}.\end{aligned}\tag{10.4.6}$$

由此可得

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{n}=\left(\frac{\partial G}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=1}=\frac{1}{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\beta-\theta)}.$$

如果 $h=0$,那么解(10.4.3)变成

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\beta-\theta)}f(\beta)\mathrm{d}\beta,$$

这就是著名的泊松积分公式.它经常写成下列形式:

$$u(\rho,\theta)=\int_0^{2\pi}P(\rho,\beta-\theta)f(\beta)\mathrm{d}\beta,$$

其中 P 称为泊松核.

10.5　亥姆霍兹算子的狄利克莱问题

我们现在将用格林函数法来确定下列亥姆霍兹算子的狄利克莱问题的解:

$$\begin{cases}\nabla^2u+\kappa^2u=h, & 在\ D\ 内,\\ u=f, & 在\ B\ 上,\end{cases}\tag{10.5.1}$$

其中 D 是以 B 为边界的单位圆域.那么,格林函数必须满足

$$\begin{cases}\nabla^2G+\kappa^2G=\delta(\xi-x,\eta-y), & 在\ D\ 内,\\ G=0, & 在\ B\ 上.\end{cases}\tag{10.5.2}$$

另外,我们要找的格林函数的形式为

$$G(\xi,\eta;x,y)=F(\xi,\eta;x,y)+g(\xi,\eta;x,y). \qquad (10.5.3)$$

由式(10.3.6),我们有

$$F=\frac{1}{4}Y_0(\kappa r), \qquad (10.5.4)$$

其中 $r=[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^{1/2}$. 因此函数 g 必须满足

$$\begin{cases}\nabla^2 g+\kappa^2 g=0, & \text{在 } D \text{ 内},\\ g=-\dfrac{1}{4}Y_0(\kappa r), & \text{在 } B \text{ 上}.\end{cases} \qquad (10.5.5)$$

这个边值问题的解容易用分离变量法加以确定. 于是由式(10.4.5)定义的极坐标系中的解可以写成下列形式:

$$g(\rho,\theta;\sigma,\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}J_n(\kappa\sigma)[a_n\cos n\beta+b_n\sin n\beta], \qquad (10.5.6)$$

其中

$$a_0=-\frac{1}{8\pi J_0(\kappa)}\int_{-\pi}^{\pi}Y_0\left[\kappa\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos(\beta-\theta)}\right]d\beta,$$

$$a_n=-\frac{1}{4\pi J_n(\kappa)}\int_{-\pi}^{\pi}Y_0\left[\kappa\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos(\beta-\theta)}\right]\cdot\cos n\beta d\beta, \qquad n=1,2,3,\cdots.$$

$$b_n=-\frac{1}{4\pi J_n(\kappa)}\int_{-\pi}^{\pi}Y_0\left[\kappa\sqrt{1+\rho^2-2\rho\cos(\beta-\theta)}\right]\cdot\sin n\beta d\beta.$$

为了求得狄利克莱问题(10.5.1)的解,我们把问题(10.5.1)中的方程的两边乘以 G 并进行积分,于是有

$$\iint_D(\nabla^2 u+\kappa^2 u)G(\xi,\eta;x,y)d\xi d\eta=\iint_D h(\xi,\eta)G(\xi,\eta;x,y)d\xi d\eta.$$

然后在上面等式的左边应用格林公式,得到

$$\iint_D h(\xi,\eta)G(\xi,\eta;x,y)d\xi d\eta-\iint_D u(\nabla^2 G+\kappa^2 G)d\xi d\eta=\int_B\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)ds.$$

但在 D 内,有 $\nabla^2 G+\kappa^2 G=\delta(\xi-x,\eta-y)$,且在 B 上,有 $G=0$. 因此,我们

有

$$u(x,y)=\iint_D h(\xi,\eta)G(\xi,\eta;x,y)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \int_B f(\xi,\eta)\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s, \tag{10.5.7}$$

其中 G 由式(10.5.3),(10.5.4)和(10.5.6)给出.

10.6　静电源像法

在这一节中,我们将讨论得到格林函数的另一种方法.这种方法称为静电源像法,它主要是通过无界区域的格林函数来构造出有界区域的格林函数.这种方法的缺点是,它只能应用于边界具有简单几何形状的问题.

作为一个例子,考察在10.4节中已解决的同样的狄利克莱问题.

设 $P(\xi,\eta)$ 是在单位圆 D 内的一点,$Q(x,y)$ 是在 D 内的源点,点 P 和点 Q 的距离是 r.又设点 Q' 位于 D 外从原点到源点 Q 的射线上(如图10.2

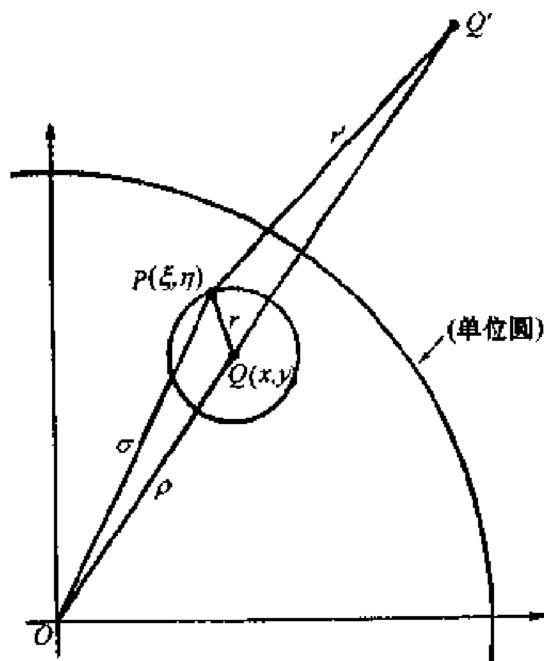


图 10.2

所示),使得

$$OQ/\sigma = \sigma/OQ',$$

其中 σ 是以原点为心,通过 P 点的圆的半径.点 Q' 称为源点 Q 的像.

因为三角形 OPQ 和 OPQ' 在 O 点有公共角，且根据假设有

$$(OQ)(OQ') = \sigma^2,$$

所以这两个三角形是相似的，我们有

$$\frac{r'}{r} = \frac{\sigma}{\rho}, \tag{10.6.1}$$

其中 $r' = PQ'$，$\rho = OQ$.

如果我们取 $\sigma = 1$，那么

$$\frac{r}{r'} \cdot \frac{1}{\rho} = 1.$$

于是可清楚地看到函数

$$\frac{1}{2\pi}\lg\left(\frac{r}{r'}\,\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{2\pi}\lg r - \frac{1}{2\pi}\lg r' + \frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{\rho} \tag{10.6.2}$$

在边界 $\sigma = 1$ 上等于零，在 D 内除点 Q 外是调和的，且满足方程(10.2.3)(注意，$\lg r'$ 除了在区域 D 外面的点 Q' 外是处处调和的). 这就启发我们应选取格林函数为

$$G = \frac{1}{2\pi}\lg r - \frac{1}{2\pi}\lg r' + \frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{\rho}. \tag{10.6.3}$$

注意到点 Q' 是在 $(1/\rho, \theta)$ 处，因此 G 在极坐标系中具有下列形式：

$$\begin{aligned} G(\rho,\theta;\sigma,\beta) &= \frac{1}{4\pi}\lg[\sigma^2 + \rho^2 - 2\sigma\rho\cos(\beta - \theta)] \\ &\quad - \frac{1}{4\pi}\lg\left[\frac{1}{\sigma^2} + \rho^2 - 2\frac{\rho}{\sigma}\cos(\beta - \theta)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{\sigma}, \end{aligned} \tag{10.6.4}$$

这和由式(10.4.6)给出的 G 是同样的.

格林函数(10.6.3)或(10.6.4)的物理解释是十分有趣的. 格林函数的第一项表示在源点上放置单位线电荷所产生的电势，第二项表示在像点上放置负单位线电荷所产生的电势，第三项表示一均匀电势. 这三个电势的和组成的电势就是所求的格林函数.

【例 10.6.1】 为了说明一个简单而明显的情形，考察半无限平面 $\eta > 0$. 这个定解问题是

$$\begin{cases} \nabla^2 u = h & \text{在 } \eta > 0 \text{ 内}, \\ u = f & \text{在 } \eta = 0 \text{ 上}. \end{cases}$$

设 (x, y) 是源点. 通过观察，像点显然应该是 $(x, -y)$. 因此如果我们构造格林函数

$$G=\frac{1}{4\pi}\lg[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]$$
$$-\frac{1}{4\pi}\lg[(\xi-x)^2+(\eta+y)^2],\qquad(10.6.5)$$

那么在 $\eta=0$ 上,$G=0$ 的条件是显然满足的.而且,函数 G 显然除源点外在 $\eta>0$内也是调和的,并且满足方程(10.2.3).

由于$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_B=\left[-\frac{\partial G}{\partial \eta}\right]_{\eta=0}$,因此解(10.4.3)为

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi-x)^2+y^2}$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lg\left[\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{(\xi-x)^2+(\eta+y)^2}\right]h(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.\quad(10.6.6)$$

【例 10.6.2】 另一个可很好地说明静电源像法的例子是在四分之一无限平面上的劳平问题,即

$$\begin{cases}\nabla^2 u=h(\xi,\eta), & \text{在 } \xi>0,\eta>0 \text{ 内},\\ u=f(\eta), & \text{在 } \xi=0 \text{ 上},\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=g(\xi), & \text{在 } \eta=0 \text{ 上}.\end{cases}\qquad(10.6.7)$$

这个问题如图 10.3 所示.

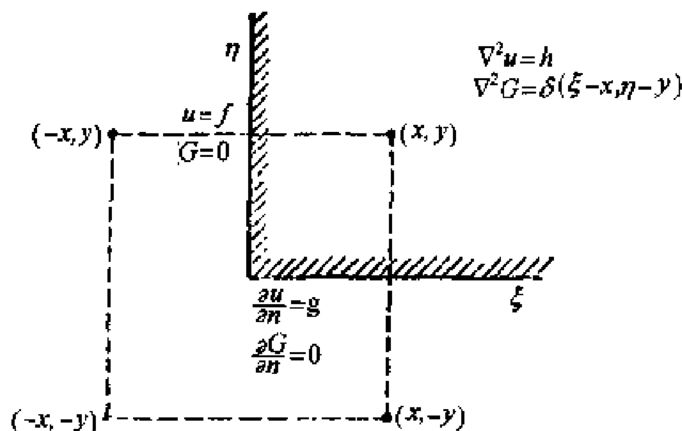


图 10.3

设$(-x,y)$,$(-x,-y)$和$(x,-y)$是源点(x,y)的三个像点.那么通过观察,可立即构造格林函数

$$G=\frac{1}{4\pi}\lg\frac{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2][(\xi-x)^2+(\eta+y)^2]}{[(\xi+x)^2+(\eta-y)^2][(\xi+x)^2+(\eta+y)^2]}.$$
$$(10.6.8)$$

这个函数除源点外满足$\nabla^2 G=0$,在 $\xi=0$ 上有 $G=0$,在 $\eta=0$ 上有 $G_\eta=0$.
于是由式(10.4.2),解是

$$u(x,y)=\iint_D Gh\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+\int_B\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty Gh\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+\int_0^\infty g(\xi)G(\xi,0;x,y)\mathrm{d}\xi$$
$$+\int_0^\infty f(\eta)G_\xi(0,\eta;x,y)\mathrm{d}\eta.$$

10.7 本征函数法

在这一节中,我们将应用在第九章中讨论过的本征函数法来求格林函数.
考察边值问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u=h, & 在 D 内,\\ u=f, & 在 B 上.\end{cases}\tag{10.7.1}$$

这个边值问题的格林函数 G 必须满足

$$\begin{cases}\nabla^2 G=\delta(\xi-x,\eta-y), & 在 D 内,\\ G=0, & 在 B 上.\end{cases}\tag{10.7.2}$$

因此,与其相应的本征值问题是

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi+\lambda\varphi=0, & 在 D 内,\\ \varphi=0, & 在 B 上.\end{cases}\tag{10.7.3}$$

设 φ_{mn}是对应于本征值λ_{mn}的本征函数,然后把 G 和 δ 都按本征函数系 φ_{mn}展开.因而有

$$G(\xi,\eta;x,y)=\sum_m\sum_n a_{mn}(x,y)\varphi_{mn}(\xi,\eta),\tag{10.7.4}$$

$$\delta(\xi-x,\eta-y)=\sum_m\sum_n b_{mn}(x,y)\varphi_{mn}(\xi,\eta),\tag{10.7.5}$$

其中

$$b_{mn}=\frac{1}{\|\varphi_{mn}\|^2}\iint_D\delta(\xi-x,\eta-y)\varphi_{mn}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$
$$=\frac{\varphi_{mn}(x,y)}{\|\varphi_{mn}\|^2},\tag{10.7.6}$$
$$\|\varphi_{mn}\|^2=\iint_D\varphi_{mn}^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

现在把式(10.7.4)和(10.7.5)代入问题(10.7.2)中的方程,并利用由本征值

问题(10.7.3)得到的关系式

$$\nabla^2 \varphi_{mn} + \lambda_{mn}\varphi_{mn} = 0,$$

得到

$$-\sum_m \sum_n \lambda_{mn} a_{mn}(x,y)\varphi_{mn}(\xi,\eta) = \sum_m \sum_n \frac{\varphi_{mn}(x,y)\varphi_{mn}(\xi,\eta)}{\|\varphi_{mn}\|^2}.$$

因此

$$a_{mn}(x,y) = -\frac{\varphi_{mn}(x,y)}{\lambda_{mn}\|\varphi_{mn}\|^2}, \tag{10.7.7}$$

所以格林函数为

$$G(\xi,\eta;x,y) = -\sum_m \sum_n \frac{\varphi_{mn}(x,y)\varphi_{mn}(\xi,\eta)}{\lambda_{mn}\|\varphi_{mn}\|^2}. \tag{10.7.8}$$

【例 10.7.1】 作为一个特例,考察矩形区域 D:$0<x<a,0<y<b$ 内的狄利克莱问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u = h, & 在 D 内,\\ u = 0, & 在 B 上.\end{cases}$$

用分离变量法可以求得本征值和本征函数.设解的形式为

$$\varphi(\xi,\eta) = X(\xi)Y(\eta).$$

把这样的解代入下列本征值问题:

$$\begin{cases}\nabla^2 \varphi + \lambda\varphi = 0, & 在 D 内,\\ \varphi = 0, & 在 B 上,\end{cases}$$

就得到两个常微分方程

$$X'' + \alpha^2 X = 0,$$

$$Y'' + (\lambda - \alpha^2)Y = 0.$$

由于有齐次边界条件 $X(0)=X(a)=0$ 和 $Y(0)=Y(b)=0$,所以可求得 X 和 Y 为

$$X_m(\xi) = A_m \sin\frac{m\pi\xi}{a},$$

$$Y_n(\eta) = B_n \sin\frac{n\pi\eta}{b}.$$

于是我们有

$$\lambda_{mn} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right).$$

因而得到本征函数

$$\varphi_{mn}(\xi,\eta)=\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}.$$

知道了 φ_{mn},就可计算 $\|\varphi_{mn}\|$,得到

$$\|\varphi_{mn}\|^2=\int_0^a\int_0^b\sin^2\frac{m\pi\xi}{a}\sin^2\frac{n\pi\eta}{b}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\frac{ab}{4}.$$

于是由式(10.7.8)得到格林函数

$$G(\xi,\eta;x,y)=-\frac{4ab}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}}{m^2b^2+n^2a^2}.$$

10.8 高维问题

格林函数法可以容易地推广到三维和高维问题的应用中去.因为在自然科学中遇到的大部分问题都是三维问题,所以我们下面要给出几个适宜于具体应用的例子.

首先让我们在三维空间中推广格林函数的定义.

含有拉普拉斯算子的狄利克莱问题的格林函数是满足下列性质的函数:

(a) $$\begin{cases}\nabla^2 G=\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta), & \text{在 } R \text{ 内}, \quad (10.8.1)\\ G=0, & \text{在 } S \text{ 上}; \quad (10.8.2)\end{cases}$$

(b) $$G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=G(\xi,\eta,\zeta;x,y,z); \tag{10.8.3}$$

(c) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{S_\varepsilon}\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S=1 \tag{10.8.4}$$

其中 n 是曲面

$$S_\varepsilon:(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=\varepsilon^2$$

的单位外法线.

像二维情况的做法一样,下列狄利克莱问题:

$$\begin{cases}\nabla^2 u=h, & \text{在 } R \text{ 内},\\ u=f, & \text{在 } S \text{ 上}\end{cases} \tag{10.8.5}$$

的解是

$$u(x,y,z)=\iiint_R Gh\,\mathrm{d}R+\iint_S f\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S. \tag{10.8.6}$$

再设

$$G(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)=F(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)+g(\xi,\eta,\zeta;x,y,z),$$

其中 F 满足方程

$$\nabla^2 F=\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta),\text{在 } R \text{ 内},$$

而 g 满足下列方程和边界条件：

$$\begin{cases}\nabla^2 g=0, & \text{在 } R \text{ 内},\\ g=-F, & \text{在 } S \text{ 上}.\end{cases}$$

【例 10.8.1】 考察半径为 a 的球形区域的狄利克莱问题. 这时，除源点外，必须有

$$\nabla^2 F=0.$$

对于

$$r=[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{1/2}>0,$$

取(x,y,z)为原点，我们有

$$\nabla^2 F=\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\right)=0.$$

当 $r>0$ 时，积分可得

$$F=A+\frac{B}{r}.$$

利用条件(10.8.4)，得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{S_\varepsilon}\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{S_\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial r}\mathrm{d}S=1.$$

所以 $B=-1/4\pi$，而 A 是任意常数. 如果为方便起见，令 $A=0$，那么我们有①

$$F=-\frac{1}{4\pi r}.\tag{10.8.7}$$

为了得到格林函数，我们利用静电源像法. 如果画一个类似于图 10.2 的三维简图，就可得到与式(10.6.1)类似的关系式：

$$r'=\frac{a}{\rho}r,\tag{10.8.8}$$

其中 r'和ρ 都是三维空间的量. 于是我们可以找到格林函数

$$G=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{-1}{r}+\frac{a}{\rho r'}\right),\tag{10.8.9}$$

它除源点外在球 R 内是处处调和的，且在球面 S 上等于零.

利用球坐标

$$\begin{cases}\xi=\tau\cos\psi\sin\alpha,\\ \eta=\tau\sin\psi\sin\alpha,\\ \zeta=\tau\cos\alpha,\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\\ z=\rho\cos\theta,\end{cases}$$

① 这是三维外问题在无穷远处的有界性条件.

其中$0\leqslant\rho<a,0<\theta<\pi,0<\varphi<2\pi$.设$(\tau,\alpha,\psi)$为$P$点的坐标,$(\rho,\theta,\varphi)$为$Q$点的坐标,那么$G$可写成下列形式:

$$G=\frac{-1}{4\pi(\tau^2+\rho^2-2\tau\rho\cos\gamma)^{1/2}}+\frac{1}{4\pi\left(\dfrac{\tau^2\rho^2}{a^2}+a^2-2\tau\rho\cos\gamma\right)^{1/2}},\tag{10.8.10}$$

其中γ是矢径$\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OQ}$的夹角.现在对G求微分,我们有

$$\left[\frac{\partial G}{\partial\tau}\right]_{\tau=a}=\frac{a^2-\rho^2}{4\pi a(a^2+\rho^2-2a\rho\cos\gamma)^{3/2}}.$$

于是当$h=0$时,球的狄利克莱问题的解是

$$u(\rho,\theta,\varphi)=\frac{a(a^2-\rho^2)}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(\alpha,\psi)\sin\alpha\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\psi}{(a^2+\rho^2-2a\rho\cos\gamma)^{3/2}},\tag{10.8.11}$$

其中$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta\cos(\psi-\varphi)$.这个公式称为*三维泊松积分公式*.

对于球的外问题,它的外法线方向是向原点的内径向,在公式(10.8.11)中用(ρ^2-a^2)代替$(a^2-\rho^2)$,就能容易地得到解.

【例 10.8.2】 另外一个例子是含有亥姆霍兹算子的三维辐射问题:

$$\begin{cases}\nabla^2u+\kappa^2u=0,\\ \lim\limits_{r^*\to\infty}r^*(u_{r^*}+\mathrm{i}\kappa u)=0,\end{cases}$$

其中$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$,r^*是场中的点与原点间的距离,而这个极限条件称为辐射条件.在这种情况下,格林函数必须满足方程

$$\nabla^2G+\kappa^2G=\delta(\xi-x,\eta-y,\zeta-z).$$

因为这时只有一个点源,所以上述方程的解也只是r的函数,我们可把这个亥姆霍兹方程写成

$$\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r}+\kappa^2G=0,\quad r>0.$$

注意,这里我们已把源点取为原点.如果把上面这个方程写成下列形式:

$$\frac{\mathrm{d}^2(Gr)}{\mathrm{d}r^2}+\kappa^2(Gr)=0,\quad r>0,$$

那么容易看出它的解是

$$Gr=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa r}+B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa r},$$

即

$$G=A\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa r}}{r}+B\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa r}}{r}.$$

为了使 G 满足辐射条件

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r}+\mathrm{i}\kappa G\right)=0,$$

必须 $A=0$,因此 G 的形式为

$$G=B\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa r}}{r}.$$

为了确定 B,我们有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{S_\varepsilon}\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S=-\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{S_\varepsilon}B\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa r}}{r}\left(\frac{1}{r}+\mathrm{i}\kappa\right)\mathrm{d}S=1,$$

由此可得 $B=-1/4\pi$,所以 G 变成

$$G=-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa r}}{4\pi r}.$$

注意当 $\kappa=0$ 时,这个格林函数变为 $-1/4\pi r$.

10.9　诺依曼问题

在边值问题这一章中,我们已经指出对诺依曼问题比对狄利克莱问题需要更多的注意.因为对诺依曼问题的解的存在性来说,附加条件或限制条件是必须的.

现在让我们考察诺依曼问题:

$$\begin{cases}\nabla^2 u+\kappa^2 u=h, & \text{在 } R \text{ 内},\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=0, & \text{在 } S \text{ 上}.\end{cases}$$

根据散度定理,我们有

$$\iiint_R \nabla^2 u\,\mathrm{d}R=\iint_S\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S.$$

因此如果对亥姆霍兹方程求积分并利用上面的结果,得到

$$\kappa^2\iiint_R u\,\mathrm{d}R=\iiint_R h\,\mathrm{d}R.$$

就泊松方程来说,$\kappa=0$,上述关系式仅当具有下列条件:

$$\iiint_R h\,\mathrm{d}R=0$$

时,才能得到满足.如果我们考察一个热传导问题,这个条件可以解释为:物体产生的总热量必须是零.这在物理上是合理的,因为这个物体的边界是绝热的,使得经过边界的总热流量是零.

如果在这种情况下，我们把格林函数定义为

$$\begin{cases}\nabla^2 G + \kappa^2 G = \delta(\xi - x, \eta - y, \zeta - z), & 在 R 内, \\ \dfrac{\partial G}{\partial n} = 0, & 在 S 上,\end{cases}$$

那么必须有

$$\kappa^2 \iiint_R G \mathrm{d}R = 1.$$

当 $\kappa=0$ 时，上式不能得到满足. 但根据物理上的推理，我们知道，如果

$$\iiint_R h \mathrm{d}R = 0,$$

那么解是存在的. 因此我们要修改格林函数的定义，使得有

$$\frac{\partial G}{\partial n} = C, \quad 在 S 上,$$

其中 C 是常数. 当在 R 上对 $\nabla^2 G=\delta$ 进行积分时，得到

$$C\iint_S \mathrm{d}S = 1.$$

不难证明如果满足条件

$$\iint_S G\mathrm{d}S = 0,$$

那么 G 仍是对称的. 于是在上述条件下，如果取 C 是曲面面积的倒数，那么泊松方程的诺依曼问题的解是

$$u(x,y,z) = C^* + \iiint_R G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)h(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

其中 C^* 是一常数.

这里应该注意，格林函数法是利用求出带有齐次边界条件的格林函数 G 的问题. 来代替含有非齐次边界条件的问题，这才使解可以表示为积分的形式.

不管上面讲过的方法，我们最后还可注意到，非齐次方程带有齐次边界条件的定解问题和齐次方程带有非齐次边界条件的定解问题是可以互相转化的. 为了说明这一点，考察下列定解问题：

$$\begin{cases} Lu = f, & 在 R 内, \\ u = 0, & 在 \partial R 上,\end{cases}$$

其中 ∂R 表示区域 R 的边界.

如果令 $v = w - u$，其中 w 在 R 内满足方程 $Lw = f$，那么上述定解问题可化为定解问题

$$\begin{cases} Lv = 0, & \text{在 } R \text{ 内}, \\ v = w, & \text{在 } \partial R \text{ 上}. \end{cases}$$

反之,如果考察下列定解问题:

$$\begin{cases} Lu = 0, & \text{在 } R \text{ 内}, \\ u = g, & \text{在 } \partial R \text{ 上}. \end{cases}$$

通过令 $v = w - u$,且求出在∂R 上满足条件 $w = g$ 的 w,那么上述定解问题容易化为定解问题

$$\begin{cases} Lv = Lw = w^*, & \text{在 } R \text{ 内}, \\ v = 0, & \text{在 } \partial R \text{ 上}. \end{cases}$$

实际上,如果有定解问题

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{在 } R \text{ 内}, \\ u = g, & \text{在 } \partial R \text{ 上}, \end{cases}$$

那么我们可以把这个定解问题化为上面两个定解问题中的任何一个问题.

习　题

1. 如果 L 表示二阶微分算子

$$Lu = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Eu,$$

而 M 表示 L 的伴随算子

$$Mv = (Av)_{xx} + (Bv)_{xy} + (Cv)_{yy} - (Dv)_x - (Ev)_y + Fv,$$

证明下列格林公式成立:

$$\iint_R (vLu - uMv)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial R} [U\cos(n,x) + V\cos(n,y)]\mathrm{d}s,$$

其中

$$U = Avu_x - u(Av)_x - u(Bv)_y + Duv,$$

$$V = Bvu_x + Cvu_y - u(Cv)_y + Euv,$$

而∂R 是区域R 的边界,n 是∂R 的外法线方向.

2. 证明一个区域的格林函数如果存在,那么必定是惟一的.

3. 确定下列单位圆的狄利克莱外问题的格林函数:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & \text{在 } r > 1 \text{ 内}, \\ u = f, & \text{在 } r = 1 \text{ 上}. \end{cases}$$

4. 证明当 $x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$时,有

$$\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) = \frac{1}{|J|}\delta(\xi - \xi_0)\delta(\eta - \eta_0),$$

其中 J 是函数行列式,(x_0, y_0)是点(ξ_0, η_0)的对应点.并由此证明在极坐标情况下,有

$$\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) = \frac{1}{r}\delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0).$$

5. 试对无限楔形确定满足下列方程和边界条件的格林函数:

$$\begin{cases}\nabla^2 G+\kappa^2 G=\dfrac{1}{r}\delta(r-r_0,\theta-\theta_0),\\ G=0,\text{在 }\theta=0\text{ 和 }\theta=\alpha\text{ 上}.\end{cases}$$

6. 试对泊松方程确定在半径为 R 的半圆形区域的边界上等于零的格林函数.

7. 求下列狄利克莱问题的解:

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0,0<x<a,0<y<b,\\ u(0,y)=u(a,y)=u(x,b)=0,\\ u(x,0)=f(x).\end{cases}$$

8. 确定下列狄利克莱问题的解:

$$\begin{cases}\nabla^2 u=f(r,\theta), & \text{在 } D\text{ 内},\\ u=0, & \text{在 } B\text{ 上},\end{cases}$$

其中 B 是半径为 R 的圆 D 的边界.

9. 在半无限空间 $\zeta>0$ 上确定满足下列方程和边界条件的格林函数:

$$\begin{cases}\nabla^2 G+\kappa^2 G=\delta(\xi-x,\eta-y,\zeta-z),\\ G=0,\quad\text{在 }\zeta=0\text{ 上}.\end{cases}$$

10. 在半无限空间 $\zeta>0$ 上确定满足下列方程和边界条件的格林函数:

$$\begin{cases}\nabla^2 G+\kappa^2 G=\delta(\xi-x,\eta-y,\zeta-z),\\ \dfrac{\partial G}{\partial n}=0,\quad\text{在 }\zeta=0\text{ 上}.\end{cases}$$

11. 在四分之一平面 $\xi>0,\eta>0$ 中,求满足下列方程和边界条件的格林函数:

$$\begin{cases}\nabla^2 G=\delta(\xi-x,\eta-y),\\ G=0,\text{在 }\xi=0\text{ 和 }\eta=0\text{ 上}.\end{cases}$$

12. 在四分之一平面 $\xi>0,\eta>0$ 中,求满足下列方程和边界条件的格林函数:

$$\begin{cases}\nabla^2 G=\delta(\xi-x,\eta-y),\\ G(0,\eta)=0,\\ G(\xi,0)=0.\end{cases}$$

13. 在半平面 $0<x<\infty,-\infty<y<\infty$ 中,求下列定解问题的格林函数:

$$\begin{cases}\nabla^2 u=f,0<x<\infty,-\infty<y<\infty,\\ u=0,\text{在 }x=0\text{ 上}.\end{cases}$$

14. 确定满足下列方程和条件的格林函数:

$$\begin{cases}\nabla^2 G=\delta(x-\xi,y-\eta), & \text{在 } R\text{ 内},\\ G=0, & \text{在 } \partial R\text{ 上},\\ G\text{ 在无穷远处为有界},\end{cases}$$

其中 R 是半无限带 $0<x<a,0<y<\infty$.

15. 求满足下列方程和边界条件的格林函数：

$$\begin{cases}\nabla^2 G = \dfrac{1}{r}\delta(r-\rho,\theta-\beta), 0<\theta<\dfrac{\pi}{3}, 0<r<1,\\ G=0, \quad \text{在 } \theta=0 \text{ 和 } \theta=\dfrac{\pi}{3} \text{ 上},\\ \dfrac{\partial G}{\partial n}=0, \quad \text{在 } r=1 \text{ 上}.\end{cases}$$

16. 解边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\kappa^2 u=0, r\geqslant 0, z>0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=\begin{cases}0, & \text{当 } r>a, z=0,\\ C, & \text{当 } r<a, z=0.\end{cases}\end{cases}$$

17. 求下列定解问题的解：

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0, 0<r<\infty, 0<\theta<2\pi,\\ u(r,0+)=u(r,2\pi-)=0.\end{cases}$$

18. 确定方程

$$\nabla^2 u-\kappa^2 u=0$$

在矩形 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b$ 的四边上都等于零的格林函数.

19. 确定亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 u+\kappa^2 u=0, 0<x<a, -\infty<y<\infty,$$

在 $x=0$ 和 $x=a$ 上等于零的格林函数.

20. 解狄利克莱外问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0, r>1,\\ u(1,\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi).\end{cases}$$

21. 用静电源像法确定由于点电荷 q 靠近一半径为 a 的带电势 V 的导电球而产生的电势.

22. 用静电源像法证明：由于一半径为 R 的导电球在均匀电场 E_0 内而产生的电势为

$$U=-E_0\left(r-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta,$$

其中 r,θ 是以原点为心的球的极坐标.

23. 一长为 l，半径为 R 的圆柱体，其两端的势为零；侧面上的势为 $f(\theta,z)$. 求圆柱体内的势.

第十一章 积分变换法

11.1 傅里叶积分变换

对于包含无限区域或半无限区域的问题,我们经常需要采用积分变换法.在第五章中,我们已讨论了在区间$(-\infty,\infty)$上以2π为周期的函数的傅里叶级数.但是,非周期函数不能用傅里叶级数来表示.在许多问题中,我们要对这种函数求出一个与傅里叶级数展开式类似的积分表达式.

在5.10节中,我们已经知道$f(x)$在区间$[-l,l]$上的傅里叶级数是

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),\qquad(11.1.1)$$

其中

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\mathrm{d}t,\quad k=0,1,2,\cdots,\qquad(11.1.2)$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\mathrm{d}t,\quad k=1,2,3,\cdots.\qquad(11.1.3)$$

把式(11.1.2)和(11.1.3)代入式(11.1.1),我们有

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}t\right.\\&\qquad\left.+\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\left[\frac{k\pi}{l}(t-x)\right]\mathrm{d}t.\end{aligned}\qquad(11.1.4)$$

现在假定$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上绝对可积,即积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$$

是收敛的,那么

$$\frac{|a_0|}{2}=\frac{1}{2l}\left|\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t.$$

当$l\to\infty$时,上式趋于零.于是,保持x不变,当$l\to\infty$时,式(11.1.4)变为

$$f(x)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\left[\frac{k\pi}{l}(t-x)\right]\mathrm{d}t.$$

如果记

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{l},\quad \Delta\alpha = \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{\pi}{l},$$

那么 $f(x)$ 可以写成

$$f(x) = \lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} F(\alpha_k)\Delta\alpha,$$

其中

$$F(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\cos[\alpha(t-x)]\mathrm{d}t.$$

如果画出函数 $F(\alpha)$ 的图形,我们能清楚地看到和式

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(\alpha_k)\Delta\alpha$$

是在曲线 $y=F(\alpha)$ 下的面积的近似值(见图 11.1). 当 $l\to\infty$ 时, $\Delta\alpha\to 0$, 而上

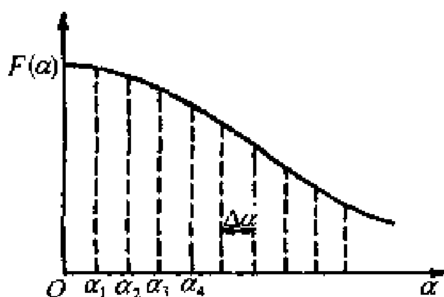


图 11.1

述和式形式地趋于一个定积分. 因此可得

$$f(x) = \int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\alpha. \qquad (11.1.5)$$

这个积分表达式称为 $f(x)$ 的傅里叶积分. 注意,上面的形式推导并不能证明这个积分的收敛性问题. 如果 $f(x)$ 满足某些条件,我们可以证明表达式(11.1.5)确实是成立的.

引理 11.1.1　如果 $f(x)$ 是区间 $[0,b]$ 上的分段光滑函数,那么当 $b>0$ 时,有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^b f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0+). \qquad (11.1.6)$$

证明　把所考察的积分写为

$$\int_0^b f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^b f(0+)\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x$$

$$+\int_0^b \frac{f(x)-f(0+)}{x}\sin\lambda x\mathrm{d}x$$

$$=f(0+)\int_0^{\lambda b}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

$$+\int_0^b \frac{f(x)-f(0+)}{x}\sin\lambda x\mathrm{d}x.$$

因为 f 是分段光滑的,所以上式第二个积分中的函数$\frac{f(x)-f(0+)}{x}$是分段连续的,于是由黎曼-勒贝格引理,当 $\lambda\to\infty$时,第二个积分趋于零.又由于

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2},$$

因此可得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^b f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0+).$$

本引理证毕.

定理 11.1.1 (傅里叶积分定理) 如果函数 $f(x)$在每个有限区间上是分段光滑的,而且在$(-\infty,\infty)$上绝对可积,那么

$$\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\alpha(t-x)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\alpha.$$

证明 注意到$|\cos\alpha(t-x)|\leqslant 1$,且根据假设,有

$$\int_{-\infty}^\infty |f(t)|\mathrm{d}t<\infty,$$

因此我们知道积分

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\alpha(t-x)\mathrm{d}t$$

关于 α 和x 是一致收敛的.所以二重积分

$$I=\int_0^\lambda\left[\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\alpha(t-x)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\alpha$$

的积分次序可以交换.于是可得

$$I=\int_{-\infty}^\infty\left[\int_0^\lambda f(t)\cos\alpha(t-x)\mathrm{d}\alpha\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^\infty f(t)\left[\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{-M}+\int_{-M}^{x}+\int_x^M+\int_M^\infty\right]f(t)\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\mathrm{d}t.$$

如果对上面第三个积分作代换 $u=t-x$，我们有

$$\int_x^M f(t)\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\mathrm{d}t=\int_0^{M-x}f(u+x)\frac{\sin\lambda u}{u}\mathrm{d}u.$$

根据引理 11.1.1，当 $\lambda\to\infty$ 时，上式的极限等于 $\pi f(x+)/2$. 类似地，上面第二个积分当 $\lambda\to\infty$ 时趋于 $\pi f(x-)/2$. 如果取 M 充分大，上面第一个积分和最后一个积分的绝对值都小于 $\varepsilon/2$. 所以当 $\lambda\to\infty$ 时，得

$$\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\alpha(t-x)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\alpha=\frac{\pi}{2}[f(x+)+f(x-)]. \tag{11.1.7}$$

本定理证毕.

如果 f 在点 x 连续，那么

$$f(x+)=f(x-)=f(x),$$

这就使得式(11.1.7)变为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\alpha(t-x)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\alpha. \tag{11.1.8}$$

我们可以把傅里叶积分(11.1.8)表示为复数形式. 在这种情况下，把

$$\cos\alpha(t-x)=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(t-x)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(t-x)}]$$

代入式(11.1.8)，并且写成两个积分，得到

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(t-x)}\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(t-x)}\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha.$$

把上面第二个积分的积分变量由 α 变成 $-\alpha$，就得到

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha. \tag{11.1.9}$$

因此我们便得到下面的定理.

定理 11.1.2　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续、分段光滑而且绝对可积，如果

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\mathrm{d}t, \tag{11.1.10}$$

那么对一切 x，有

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty F(\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha. \tag{11.1.11}$$

函数 $F(\alpha)$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶积分变换，而 $f(x)$ 称为 $F(\alpha)$ 的傅里叶积

分逆变换(以后积分变换简称变换). 注意,这里因子 $1/2\pi$ 已经拆开,并分别放在式(11.1.10)和(11.1.11)的积分前面. 但我们经常发现,因子 $1/2\pi$ 只含在关系式(11.1.10)或(11.1.11)之中,而且在式(11.1.10)中函数 $e^{i\alpha t}$ 写成 $e^{-i\alpha t}$,从而在式(11.1.11)中函数 $e^{-i\alpha x}$ 写成 $e^{i\alpha x}$.

【例 11.1.1】 求函数 $f(x)=e^{-|x|}$ 的傅里叶变换.

由式(11.1.10),有

$$\begin{aligned}F(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{i\alpha t}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{t(1+i\alpha)}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-t(1-i\alpha)}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+i\alpha}+\frac{1}{1-i\alpha}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\alpha^2}.\end{aligned}$$

与傅里叶正弦级数和傅里叶余弦级数相类似,对奇函数和偶函数可分别有傅里叶正弦变换和傅里叶余弦变换.

推论 11.1.1 设 $f(x)$ 定义在 $0\leqslant x<\infty$ 上,而且把它延拓到 $(-\infty,\infty)$ 上使之成为奇函数,并满足傅里叶积分定理的条件. 如果

$$F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt,$$

那么在 $f(x)$ 的连续点处,有

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_s(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha.$$

证明 由式(11.1.8),我们有

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos\alpha t\cos\alpha x + \sin\alpha t\sin\alpha x)dt\right]d\alpha.$$

因为对所有实数 t,有 $f(-t) = -f(t)$,所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt = 2\int_0^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt,$$

从而

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt\right]\sin\alpha x\,d\alpha.$$

这就是我们所要证明的结果. 本推论证毕.

推论 11.1.2 设 $f(x)$ 定义在 $0\leqslant x<\infty$ 上,而且把它延拓到 $(-\infty,\infty)$ 上使之成为偶函数,并满足傅里叶积分定理的条件. 如果

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,\mathrm{d}t,$$

那么在 $f(x)$ 的连续点处,有

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_c(\alpha)\cos\alpha x\,\mathrm{d}\alpha.$$

证明　由式(11.1.8),我们有

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)(\cos\alpha t\cos\alpha x+\sin\alpha t\sin\alpha x)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\alpha.$$

因为对所有实数 t,有 $f(-t)=f(t)$,所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha t\,\mathrm{d}t=0.$$

从而

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,\mathrm{d}t\right]\cos\alpha x\,\mathrm{d}\alpha.$$

这就是我们所要证明的结果.本推论证毕.

【例 11.1.2】　求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}(a>0)$ 的傅里叶正弦变换和傅里叶余弦变换.

因为

$$\begin{aligned}F_s(\alpha)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\sin\alpha t\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\mathrm{e}^{-at}\frac{\cos\alpha t}{\alpha}\right)\Bigg|_0^{\infty}\\&\quad-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{a}{\alpha}\mathrm{e}^{-at}\cos\alpha t\,\mathrm{d}t\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\alpha}\left(\mathrm{e}^{-at}\frac{\sin\alpha t}{\alpha}\right)\Bigg|_0^{\infty}\\&\quad-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a^2}{\alpha^2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\sin\alpha t\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

所以

$$F_s(\alpha)\left(1+\frac{a^2}{\alpha^2}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha},$$

因而

$$F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{a^2+\alpha^2}.$$

同样我们可以确定 $F_c(\alpha)$,得到

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\alpha^2}.$$

11.2 傅里叶积分变换的性质[①]

定理 11.2.1（线性定理） 傅里叶变换是线性变换.

证明 设函数 $f(x)$ 的傅里叶变换表示为

$$\mathscr{F}[f]=F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt,$$

那么对两个任意常数 a 和 b，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[af+bg]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[af+bg]e^{i\alpha t}dt\\&=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt+\frac{b}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{i\alpha t}dt\\&=a\mathscr{F}[f]+b\mathscr{F}[g].\end{aligned}$$

本定理证毕.

定理 11.2.2（位移定理） 设 $\mathscr{F}[f]$ 是 f 的傅里叶变换，那么

$$\mathscr{F}[f(t-c)]=e^{i\alpha c}\mathscr{F}[f(t)],$$

其中 c 是任何实常数.

证明 由定义，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t-c)]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t-c)e^{i\alpha t}dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{i\alpha(\xi+c)}d\xi\quad(\text{作积分变量变换 }\xi=t-c)\\&=e^{i\alpha c}\mathscr{F}[f(t)].\end{aligned}$$

本定理证毕.

定理 11.2.3（相似定理） 如果 $\mathscr{F}[f]$ 是 f 的傅里叶变换，那么

$$\mathscr{F}[f(ct)]=(1/|c|)F(\alpha/c),$$

其中 c 是任何不等于零的实常数.

证明 对于 $c\neq 0$，有

$$\mathscr{F}[f(ct)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(ct)e^{i\alpha t}dt.$$

---

① 在下面讨论傅里叶变换的定理时，总是假定函数是满足定理 11.1.1 的条件的.

如果令 $\xi=ct$,那么

$$\mathscr{F}[f(ct)]=\frac{1}{|c|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{i(\alpha/c)\xi}d\xi$$
$$=(1/|c|)F(\alpha/c).$$

本定理证毕.

定理 11.2.4（微分定理）　设 f 在$(-\infty,\infty)$上连续分段光滑,而且当 $|t|\to\infty$时,$f(t)\to0$.如果 f 和f'都绝对可积,那么

$$\mathscr{F}[f']=-i\alpha\mathscr{F}[f].$$

证明　事实上,

$$\mathscr{F}[f'(t)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)e^{i\alpha t}dt$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(t)e^{i\alpha t}\Big|_{-\infty}^{\infty}-i\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt\right]$$
$$=-i\alpha\mathscr{F}[f(t)].$$

本定理证毕.

这个结果容易加以推广.设 f 和它的直到 $n-1$ 阶的导数都是连续的,f 的 n 阶导数是分段连续的,且 f 和它的直到 n 阶的导数都在$(-\infty,\infty)$上绝对可积.另外,设 f 和它的直到 $n-1$ 阶的导数当$|t|\to\infty$时都趋于零,那么

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(-i\alpha)^n\mathscr{F}[f(t)],n=1,2,3,\cdots.\tag{11.2.1}$$

【例 11.2.1】　求下列在半平面 $y>0$ 上的狄利克莱问题的解[①]:

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0, & -\infty<x<\infty,y>0,\\ u(x,0)=f(x), & -\infty<x<\infty,\\ \lim\limits_{|x|\to\infty}u(x,y)=0, & \lim\limits_{|x|\to\infty}u_x(x,y)=0,\\ \text{当 } y\to\infty \text{ 时}, & u \text{ 有界}.\end{cases}$$

令 $U(\alpha,y)$是 $u(x,y)$关于变量 x 的傅里叶变换,即

$$U(\alpha,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)e^{i\alpha x}dx.$$

利用式(11.2.1),我们有

$$\mathscr{F}[u_{xx}]=(-i\alpha)^2\mathscr{F}[u]=-\alpha^2U(\alpha,y).\tag{11.2.2}$$

注意,这时还有

---

① 由于预先不知道 u 是否满足傅里叶变换与运算条件,因此下面的推导过程只是求形式解.

$$\mathscr{F}[u_{yy}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_{yy} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x\right] = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}y^2}. \tag{11.2.3}$$

把拉普拉斯方程对 x 进行傅里叶变换,得到

$$\mathscr{F}[u_{xx} + u_{yy}] = 0.$$

利用定理 11.2.1,可得

$$\mathscr{F}[u_{xx}] + \mathscr{F}[u_{yy}] = 0. \tag{11.2.4}$$

把式(11.2.2)和(11.2.3)代入式(11.2.4),就得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}y^2} - \alpha^2 U = 0.$$

这是一个带参数 α 的二阶常微分方程,它的解是

$$U(\alpha,y) = A(\alpha)\mathrm{e}^{\alpha y} + B(\alpha)\mathrm{e}^{-\alpha y}.$$

因为当 $y\to\infty$ 时,u 是有界的,所以当 $y\to\infty$ 时,$U(\alpha,y)$ 也必须是有界的.于是当 $\alpha>0$ 时,必须 $A(\alpha)=0$,而且

$$U(\alpha,0) = B(\alpha).$$

当 $\alpha<0$ 时,必须有 $B(\alpha)=0$,而且

$$U(\alpha,0) = A(\alpha).$$

因此对任何 α,有

$$U(\alpha,y) = U(\alpha,0)\mathrm{e}^{-|\alpha|y},$$

注意到

$$U(\alpha,0) = \mathscr{F}[u(x,0)] = \mathscr{F}[f(x)],$$

由此可得

$$U(\alpha,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-|\alpha|y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x.$$

所以 $U(\alpha,y)$ 的逆变换为

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-|\alpha|y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\xi}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\alpha[\mathrm{i}(\xi-x)]-|\alpha|y}\mathrm{d}\alpha.$$

容易证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\alpha[\mathrm{i}(\xi-x)]-|\alpha|y}\mathrm{d}\alpha = \frac{2y}{(\xi-x)^2+y^2}.$$

因此在半平面 $y>0$ 上的狄利克莱问题的解是

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi - x)^2 + y^2}\mathrm{d}\xi.$$

我们还可以由这个解推出在半平面 $y>0$ 上的诺依曼问题的解.

【例 11.2.2】 求下列在半平面 $y>0$ 上的诺依曼问题的解:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\infty < x < \infty, y > 0, \\ u_y(x,0) = g(x), & -\infty < x < \infty, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x,y) = 0, & \lim\limits_{|x|\to\infty} u_x(x,y) = 0, \\ \text{当 } y \to \infty \text{ 时}, & u \text{ 有界}. \end{cases}$$

令 $v(x,y)=u_y(x,y)$,那么

$$u(x,y) = \int_a^y v(x,\eta)\mathrm{d}\eta,$$

其中 a 是任意常数. 于是诺依曼问题变为下列狄利克莱问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \\ v(x,0) = u_y(x,0) = g(x), \end{cases}$$

它的解为

$$v(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi - x)^2 + g^2}.$$

因此可得

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_a^y \eta\int_{\infty}^{\infty}\frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi - x)^2 + \eta^2}\mathrm{d}\eta \\ &- \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\lg\left[\frac{(\xi - x)^2 + y^2}{(\xi - x)^2 + a^2}\right]\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

11.3 卷积及其傅里叶变换

函数

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{11.3.1}$$

称为函数 $f(x)$和 $g(x)$在区间$(-\infty,\infty)$上的卷积.

定理 11.3.1 (卷积定理) 如果 $F(\alpha)$和 $G(\alpha)$分别是函数 $f(x)$和 $g(x)$的傅里叶变换,那么卷积 $f * g(x)$的傅里叶变换等于乘积 $F(\alpha)G(\alpha)$. 用等式表达,即

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)G(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha$$
$$=f*g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)g(\xi)d\xi.$$

证明 由定义,

$$\mathscr{F}[f*g]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}dx\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)g(\xi)d\xi$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)e^{i\alpha\xi}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)e^{i\alpha(x-\xi)}dx.$$

利用变量代换 $\eta=x-\xi$,就有

$$\mathscr{F}[f*g]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)e^{i\alpha\xi}d\xi\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)e^{i\alpha\eta}d\eta$$
$$=F(\alpha)G(\alpha).$$

本定理证毕.

卷积有下列性质:

(1) $f*g=g*f$ (交换律);

(2) $f*(g*h)=(f*g)*h$(结合律);

(3) $f*(g+h)=f*g+f*h$ (分配律).

【例 11.3.1】 求下列无限杆的热传导方程的初值问题的解:

$$\begin{cases}u_t-u_{xx}=0, & -\infty<x<\infty,t>0,\\ u(x,0)=f(x), & -\infty<x<\infty.\end{cases}$$

$u(x,t)$关于 x 的傅里叶变换是

$$U(\alpha,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{i\alpha x}dx.$$

因为

$$\mathscr{F}[u_{xx}]=(-i\alpha)^2\mathscr{F}[u]=-\alpha^2U(\alpha,t)$$

和

$$\mathscr{F}[u_t]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_te^{i\alpha x}dx=\frac{dU}{dt},$$

所以热传导方程变为下列常微分方程:

$$\frac{dU}{dt}+\alpha^2U=0.$$

这个常微分方程的解是

$$U(\alpha,t)=A(\alpha)e^{-\alpha^2t}. \tag{11.3.2}$$

对初始条件进行傅里叶变换,可得

$$U(\alpha,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x=F(\alpha).$$

由式(11.3.2),有

$$A(\alpha)=U(\alpha,0)=F(\alpha).$$

因此

$$U(\alpha,t)=F(\alpha)\mathrm{e}^{-\alpha^2 t},$$

它的逆变换为

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[F(\alpha)\mathrm{e}^{-\alpha^2 t}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha. \tag{11.3.3}$$

函数 $G(\alpha)=\mathrm{e}^{-\alpha^2 t}$ 的逆变换是

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha^2 t-\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2t}}\mathrm{e}^{-x^2/4t}$$ （见本章习题 10).

于是利用卷积定理 11.3.1,等式(11.3.3)的右边可表示为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)g(x-\xi)\mathrm{d}\xi.$$

所以热传导方程的初值问题的解具有下列形式:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-(x-\xi)^2/4t}\mathrm{d}\xi.$$

考察下列情形.设

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x<0,\\ a, & \text{当 } x>0,\end{cases}$$

那么,$u(x,t)$变为

$$u(x,t)=\frac{a}{2\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(x-\xi)^2/4t}\mathrm{d}\xi.$$

如果引进新变量

$$\eta=\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}},$$

那么上述积分变为

$$u(x,t)=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/2\sqrt{t}}^{\infty}\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/2\sqrt{t}}^{0} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta.$$

因为积分

$$\int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

所以就有

$$u(x,t) = \frac{a}{2} + \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-\eta^2} d\eta$$
$$= \frac{a}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right],$$

其中 $\operatorname{erf}(\alpha)$ 称为误差函数,它的定义是

$$\operatorname{erf}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha} e^{-\eta^2} d\eta.$$

这种函数应用很广,并有表可查其函数值.

11.4 阶梯函数和脉冲函数的傅里叶变换

在这一节中,我们将确定阶梯函数和脉冲函数的傅里叶变换,这两种函数在数学物理中都是经常出现的.

单位阶梯函数的定义是

$$u_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < a, \\ 1, & \text{当 } x \geqslant a, \end{cases} \qquad a \geqslant 0, \tag{11.4.1}$$

其图形如图 11.2 所示.

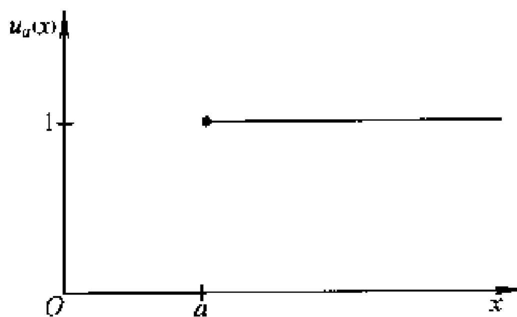


图 11.2

我们不难确定单位阶梯函数的傅里叶变换.首先考察

$$\mathscr{F}[u_a(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_a(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x,$$

但这个积分在通常意义下是不存在的. 为了避开这种做法,我们定义下列新函数:

$$u_a(x)\mathrm{e}^{-\beta x} = \begin{cases} 0, & 当\ x < a, \\ \mathrm{e}^{-\beta x}, & 当\ x \geqslant a. \end{cases}$$

显然当 $\beta \to 0$ 时,这个函数变为单位阶梯函数. 因此我们用下列过程求单位阶梯函数的傅里叶变换:

$$\mathscr{F}[u_a(x)] = \lim_{\beta\to 0}\mathscr{F}[u_a(x)\mathrm{e}^{-\beta x}]$$
$$= \lim_{\beta\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_a(x)\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{\beta\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\beta-\mathrm{i}\alpha)x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha a}}{\sqrt{2\pi}\alpha}. \tag{11.4.2}$$

当 $a=0$ 时,有

$$\mathscr{F}[u_0(x)] = \mathrm{i}/(\sqrt{2\pi}\alpha). \tag{11.4.3}$$

脉冲函数的定义是

$$p(x) = \begin{cases} h, & 当\ a-\varepsilon < x < a+\varepsilon, \\ 0, & 当\ x \leqslant a-\varepsilon\ 或\ x \geqslant a+\varepsilon, \end{cases}$$

其中 h 是很大的正数,$a>0$,而 ε 是很小的正数,其图形如图 11.3 所示. 这类函数出现在实际应用中,例如一个很大的力作用在一段很短的时间内.

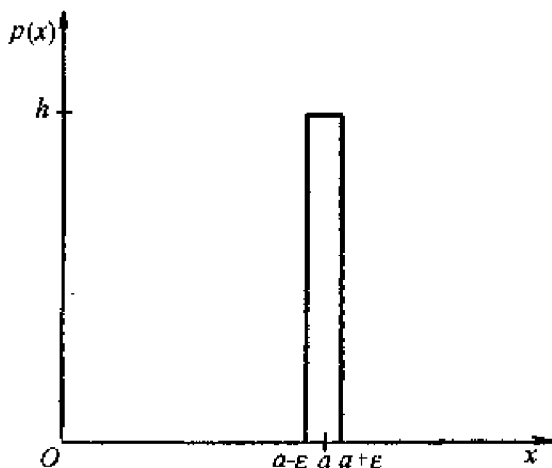


图 11.3

脉冲函数的傅里叶变换是

$$\mathscr{F}[p(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} he^{i\alpha x}dx$$

$$= \frac{h}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{i\alpha a}}{i\alpha}(e^{i\alpha\varepsilon} - e^{-i\alpha\varepsilon})$$

$$= \frac{2h\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}e^{i\alpha a}\frac{\sin\alpha\varepsilon}{\alpha\varepsilon}.$$

现在如果选取 h 的值为 $1/2\varepsilon$，那么由下式：

$$I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx$$

所定义的脉冲函数的积分变为

$$I(\varepsilon) = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}dx = 1,$$

这是一个与 ε 无关的常数. 当 $h = 1/2\varepsilon$，这个特殊的脉冲函数 $p_\varepsilon(x)$ 在取极限 $\varepsilon \to 0$ 时满足下面两个关系式：

$$\lim_{\varepsilon\to 0} p_\varepsilon(x) = 0, x \neq a;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon) = 1.$$

这可以看成是在前面第十章中我们定义过的狄拉克 δ 函数所满足的两个结果：

$$\begin{cases}\delta(x-a) = 0, x \neq a, \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)dx = 1.\end{cases} \tag{11.4.4}$$

因此我们现在把 δ 函数的傅里叶变换定义为函数 $p_\varepsilon(x)$ 的傅里叶变换的极限. 于是我们有

$$\mathscr{F}[\delta(x-a)] \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\mathscr{F}[p_\varepsilon(x)]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{i\alpha a}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\alpha\varepsilon}{\alpha\varepsilon} = \frac{e^{i\alpha a}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{11.4.5}$$

这里利用了洛必达法则，得到 $\lim_{\varepsilon\to 0}(\sin\alpha\varepsilon)/\alpha\varepsilon = 1$. 当 $a = 0$ 时，就得到

$$\mathscr{F}[\delta(x)] = 1/\sqrt{2\pi}. \tag{11.4.6}$$

【例 11.4.1】（中子的减缓）

考察定解问题

$$\begin{cases}u_\tau = u_{xx} + \delta(x)\delta(\tau), & (11.4.7)\\ u(x,0) = \delta(x), & (11.4.8)\\ \lim_{|x|\to\infty} u(x,\tau) = 0. & (11.4.9)\end{cases}$$

这个问题是一个无限介质中的缓慢中子的运动问题，而在介质中有一个中子源.这里 $u(x,\tau)$表示单位体积在单位时间内到达了年代 τ 的中子数，而 $\delta(x)\delta(\tau)$表示源函数.

令 $u(x,\tau)$的傅里叶变换是 $U(\alpha,\tau)$，那么把方程(11.4.7)对 x 作傅里叶变换，就得到下列常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau}+\alpha^2U=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta(\tau).$$

利用条件 $U(\alpha,0)=1/\sqrt{2\pi}$，这个常微分方程的解是

$$U(\alpha,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\alpha^2\tau}.$$

因此它的傅里叶逆变换为

$$u(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha^2\tau-\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\mathrm{e}^{-x^2/4\tau}.$$

11.5　半无限区域

对半无限区域来说，使用在 11.1 节中所定义的傅里叶正弦变换和余弦变换来解边值问题是特别合适的.在举例说明傅里叶正弦变换和余弦变换的应用之前，我们必须先证明下面的微分定理.

定理 11.5.1　设当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$和它的一阶导数都趋于零.如果 $F_c(\alpha)$是 $f(x)$的傅里叶余弦变换，那么

$$\mathscr{F}_c[f''(x)]=-\alpha^2F_c(\alpha)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0).$$

证明　事实上，

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_c[f''(x)]&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f''(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}[f'(x)\cos\alpha x]_0^{\infty}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha\int_0^{\infty}f'(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}x\\&=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha[f(x)\sin\alpha x]_0^{\infty}\\&\quad-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha^2\int_0^{\infty}f(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x\\&=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)-\alpha^2F_c(\alpha).\end{aligned}$$

本定理证毕.

同样地可得高阶导数的变换结果.

定理 11.5.2 设当 $x\to\infty$ 时, $f(x)$ 和它的一阶导数都趋于零. 如果 $F_s(\alpha)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶正弦变换, 那么

$$\mathscr{F}_s[f''(x)]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha f(0)-\alpha^2F_s(\alpha).$$

证明留给读者自己来做.

【例 11.5.1】 一根半无限长的杆, 初始温度分布等于零, 且在端点 $x=0$ 处以 $g(t)$ 为速率输入热量, 求杆的温度分布. 这时定解问题可归结为

$$\begin{cases}u_t=u_{xx},x>0,t>0,\\u(x,0)=0,\\u_x(0,t)=g(t).\end{cases}$$

这里假设当 $x\to\infty$ 时, $u(x,t)$ 和 $u_x(x,t)$ 都趋于零.

令 $U(\alpha,t)$ 是 $u(x,t)$ 的傅里叶余弦变换, 那么热传导方程变换为常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+\alpha^2U=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}g(t),$$

这个常微分方程的解是

$$U(\alpha,t)=\mathrm{e}^{-\alpha^2t}\left[-\int_0^t\sqrt{\frac{2}{\pi}}g(\tau)\mathrm{e}^{\alpha^2\tau}\mathrm{d}\tau+C\right].$$

利用初始条件, 得到

$$U(\alpha,0)=0=C.$$

于是

$$U(\alpha,t)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^tg(\tau)\mathrm{e}^{-\alpha^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

从而 $U(\alpha,t)$ 的逆变换是

$$\begin{aligned}u(x,t)&=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^tg(\tau)\mathrm{e}^{-\alpha^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\cos\alpha x\mathrm{d}\alpha\\&=-\frac{2}{\pi}\int_0^tg(\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\alpha^2(t-\tau)}\cos\alpha x\mathrm{d}\alpha.\end{aligned}$$

上式中积分号内的积分为(见本章习题 6)

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\alpha^2(t-\tau)}\cos\alpha x\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t-\tau}}\mathrm{e}^{-x^2/4(t-\tau)}.$$

因此所求的定解问题的解是

$$u(x,t)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{e}^{-x^2/4(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

11.6 汉克尔变换和梅林变换

除了傅里叶变换以外,还有其他的积分变换,例如汉克尔变换和梅林变换.这些积分变换可以用来解各种特殊类型的问题,例如汉克尔变换对于含有贝赛尔函数的问题是非常适用的.

函数 $f(x)$的 ν 阶汉克尔变换$H(\xi)$的定义是

$$H(\xi)=\int_0^\infty f(x)J_\nu(\xi x)x\mathrm{d}x,\quad \nu\geqslant-\frac{1}{2},$$

而它的逆变换为

$$f(x)=\int_0^\infty H(\xi)J_\nu(\xi x)\xi\mathrm{d}\xi.$$

函数 $f(x)$的梅林变换 $M(s)$的定义是

$$M(s)=\int_0^\infty f(x)x^{s-1}\mathrm{d}x,$$

而它的逆变换为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}M(s)x^{-s}\mathrm{d}s.$$

有兴趣的读者可进一步学习史奈登(I. N. Sneddon)著的《富利叶变换》.

11.7 拉普拉斯积分变换

由于用拉普拉斯变换解偏微分方程的步骤较简单,所以拉普拉斯变换经常用来求相当广泛的一类偏微分方程的解.像其他积分变换一样,拉普拉斯变换是用来求特解的.因为在解偏微分方程时,通解即使可能求得,一般也是很困难的,因此积分变换方法往往为得到特解提供了一个有用的工具.

我们称函数

$$F(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t\qquad(s>0)$$

为函数 $f(t)$的拉普拉斯积分变换(可省略积分二字),并表示为

$$\mathscr{L}[f(t)]=F(s),$$

其中 s 是变换变量,且假定这个广义积分是收敛的.

拉普拉斯变换的逆变换将记为

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t).$$

下面求几个初等函数的拉普拉斯变换.

(1)设 $f(t)=c$(c 是常数),那么

$$\mathscr{L}[c] = \int_0^\infty e^{-st}c\,dt = \left[-\frac{ce^{-st}}{s}\right]_0^\infty = c/s.$$

(2)设 $f(t)=e^{at}$(a 是常数),那么

$$\mathscr{L}[e^{at}] = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a} \qquad (s>a).$$

(3) 设 $f(t)=t^2$,那么

$$\mathscr{L}[t^2] = \int_0^\infty e^{-st}t^2dt.$$

由分部积分可得

$$\mathscr{L}[t^2] = \left[-\frac{t^2e^{-st}}{s}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}2t\,dt.$$

因为当 $t\to\infty$时,$t^2e^{-st}\to 0$,所以有

$$\mathscr{L}[t^2] = \frac{2}{s}\left[-\frac{e^{-st}}{s}t\right]_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}dt = 2/s^3.$$

(4)设 $f(t)=\sin\omega t$,那么

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathscr{L}[\sin\omega t] = \int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,dt \\ &= \left[-\frac{e^{-st}}{s}\sin\omega t\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}\omega\cos\omega t\,dt \\ &= \frac{\omega}{s}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\cos\omega t\right]_0^\infty - \frac{\omega}{s}\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}\omega\sin\omega t\,dt, \end{aligned}$$

因而

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}F(s).$$

所以由上式解出 $F(s)$,得

$$\mathscr{L}[\sin\omega t] = \omega/(s^2+\omega^2).$$

定理 11.7.1 设函数 $f(t)$对一切正数 T,在区间$[0,T]$中是分段连续的,而且当 $t\to\infty$时 $f(t)$是指数阶的[①],即当 $t\to\infty$时,对常数 $a>0$ 有 $f(t)=O(e^{at})$,那么函数 $f(t)$的拉普拉斯变换对一切 $s>a$ 是存在的.

---

① 函数 $f(t)$称为当 $t\to\infty$时是指数阶的,如果存在常数 $a>0$,使得对所有 $t>T$,$e^{-at}|f(t)|$是有界的,即存在常数 $M>0$,$|f(t)|\leqslant Me^{at}$.

证明　因为 $f(t)$是分段连续和指数阶的,所以我们有

$$|\mathscr{L}[f(t)]| = \left|\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\right| \leqslant \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|dt$$

$$\leqslant \int_0^\infty e^{-st}Me^{at}dt = M\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt$$

$$= M/(s-a) \quad (s>a).$$

因此对一切 $s>a$,拉普拉斯变换

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

是存在的.本定理证毕.

11.8　拉普拉斯积分变换的性质[①]

定理 11.8.1(线性定理)　如果函数 $f(t)$和 $g(t)$的拉普拉斯变换分别是$\mathscr{L}[f(t)]$和 $\mathscr{L}[g(t)]$,那么

$$\mathscr{L}[af(t)+bg(t)] = a\mathscr{L}[f(t)] + b\mathscr{L}[g(t)],$$

其中 a 和 b 是两个任意常数.

证明

$$\mathscr{L}[af(t)+bg(t)] = \int_0^\infty [af(t)+bg(t)]e^{-st}dt$$

$$= a\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + b\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$$

$$= a\mathscr{L}[f(t)] + b\mathscr{L}[g(t)].$$

定理 11.8.2(第一位移定理)　如果函数 $f(t)$的拉普拉斯变换是 $F(s)$,那么 $e^{at}f(t)$的拉普拉斯变换是 $F(s-a)$.

证明

$$\mathscr{L}[e^{at}f(t)] = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a).$$

本定理证毕.

【例 11.8.1】　(a)如果 $2/s^3 = \mathscr{L}[t^2]$,那么

$$2/(s+1)^3 = \mathscr{L}[t^2e^{-t}].$$

(b)如果 $\omega/(s^2+\omega^2) = \mathscr{L}[\sin\omega t]$,那么

$$\omega/[(s+1)^2+\omega^2] = \mathscr{L}[(\sin\omega t)e^{-t}].$$

---

① 在下面讨论拉普拉斯变换的定理时,总是假定函数是满足定理 11.7.1 的条件的.

定理 11.8.3（相似定理） 如果函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换是 $F(s)$，那么 $f(ct)$ 的拉普拉斯变换是 $(1/c)F(s/c)$，其中 c 是大于零的常数.

证明

$$\mathscr{L}[f(ct)] = \int_0^\infty e^{-st} f(ct)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{c} e^{-(s\xi/c)} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$(\text{作积分变量变换 } \xi = ct)$$

$$= (1/c)F(s/c).$$

本定理证毕.

【例 11.8.2】 (a)如果 $s/(s^2+1) = \mathscr{L}[\cos t]$，那么

$$\frac{1}{\omega}\frac{s/\omega}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{s}{s^2+\omega^2} = \mathscr{L}[\cos\omega t].$$

(b)如果 $1/(s-1) = \mathscr{L}[e^t]$，那么

$$\frac{1}{a}\frac{1}{\frac{s}{a} - 1} = \mathscr{L}[e^{at}],$$

即

$$1/(s-a) = \mathscr{L}[e^{at}].$$

定理 11.8.4（微分定理） 设函数 $f(t)$ 对所有 $T>0$，在区间 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上连续，并且当 $t\to\infty$ 时是指数阶的，又 $f'(t)$ 在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上分段连续，那么 $f'(t)$ 的拉普拉斯变换存在，并有

$$\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0).$$

证明 考察积分

$$\int_0^T e^{-st} f'(t)\mathrm{d}t.$$

由分部积分可得

$$\int_0^T e^{-st} f'(t)\mathrm{d}t = [e^{-st} f(t)]_0^T - \int_0^T s e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$$

$$= e^{-sT} f(T) - f(0) + s\int_0^T e^{-st} f(t)\mathrm{d}t.$$

因为对于充分大的 t，存在常数 $a>0$ 和 $M>0$，使得 $|f(t)| \leqslant Me^{at}$，所以

$$|e^{-sT} f(T)| \leqslant Me^{(s-a)T}.$$

当 $T\to\infty$ 时，只要 $s>a$，都有 $e^{-sT}f(T)\to 0$，因此

$$\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0).$$

本定理证毕.

如果 $f'(t)$ 和 $f''(t)$ 分别满足对 $f(t)$ 和 $f'(t)$ 所加的条件，那么利用上述

定理可立即得到 $f''(t)$ 的拉普拉斯变换，即

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f''(t)] &= s\mathscr{L}[f'(t)] - f'(0) \\ &= s\{s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)\} - f'(0) \\ &= s^2\mathscr{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

显然，$f^{(n)}(t)$ 的拉普拉斯变换同样可逐次利用定理 11.8.4 得到，其结果是

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] &= s^n\mathscr{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) \\ &\quad - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).\end{aligned}$$

定理 11.8.5（积分定理） 如果 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，那么

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = F(s)/s.$$

证明

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] &= \int_0^\infty\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = F(s)/s,\end{aligned}$$

因为 $\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 是指数阶的. 本定理证毕.

用拉普拉斯变换解问题的困难在于求逆变换. 虽然有求拉普拉斯逆变换的反演公式，但需要用到复变函数的知识. 然而对于数学物理问题来说，有时不必利用反演公式. 我们可以把已知的拉普拉斯变换用变换变量的简单函数展为部分分式，再对这些简单函数查拉普拉斯变换表逐项得到对应的逆变换. 这里应当注意，我们要用到函数及其拉普拉斯变换之间有一一对应关系的这个假定，它可用定理形式叙述如下：

定理 11.8.6（勒奇定理） 设 $f(t)$ 和 $g(t)$ 都是指数阶的分段连续函数. 如果存在常数 s_0，使 $s > s_0$ 时有 $\mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[g(t)]$，那么对一切 $t > 0$，除了 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的间断点之外，有 $f(t) = g(t)$.

定理的证明可参看有关其他参考书.

【例 11.8.3】 考察一根半无限长的弦在外力 $f(t)$ 作用下的振动. 设弦的一端固定，另一端在垂直方向可自由移动，而且弦在初始时刻是静止的. 这根弦的振动可归结为下列定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(t), & 0 < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0, & \lim\limits_{x\to\infty} u_x(x,t) = 0. \end{cases}$$

令 $U(x,s)$ 是 $u(x,t)$ 的拉普拉斯变换. 把弦振动方程对 t 作拉普拉斯变

换,并利用初始条件得到常微分方程

$$\frac{d^2U}{dx^2}-(s^2/c^2)U=-F(s)/c^2,$$

其中

$$F(s)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt.$$

这个常微分方程的解是

$$U(x,s)=Ae^{sx/c}+Be^{-sx/c}+[F(s)/s^2].$$

再对边界条件作拉普拉斯变换,得下列两个条件:

$$U(0,s)=0$$

和

$$\lim_{x\to\infty}\frac{dU}{dx}(x,s)=0.$$

由第二个条件,应有 $A=0$. 再利用第一个条件,得到

$$U(0,s)=B+[F(s)/s^2]=0.$$

因此

$$U(x,s)=[F(s)/s^2][1-e^{-sx/c}].$$

(a)当 $f(t)=f_0$(常数)时,

$$U(x,s)=f_0\left(\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s^3}e^{-sx/c}\right),$$

它的逆变换是①

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{f_0}{2}\left[t^2-\left(t-\frac{x}{c}\right)^2\right], & 当\ t>x/c,\\ (f_0/2)t^2, & 当\ t\leqslant x/c.\end{cases}$$

(b)当 $f(t)=\cos\omega t$(ω 是常数)时,

$$F(s)=\int_0^{\infty}\cos\omega t e^{-st}dt=s/(\omega^2+s^2).$$

于是可得

$$U(x,s)=\frac{1}{s(\omega^2+s^2)}[1-e^{-sx/c}]. \qquad (11.8.1)$$

把上式第一个因子改写为部分分式

$$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}=\frac{1}{\omega^2}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega^2}\right].$$

---

① 在求这个逆变换和式(11.8.1)的逆变换时,都要利用定理 11.10.1.

因此

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right]=\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)=\frac{2}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right).$$

如果记

$$\psi(t)=\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right),$$

那么式(11.8.1)的逆变换可以写成下列形式：

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{2}{\omega^2}\left[\psi(t)-\psi\left(t-\dfrac{x}{c}\right)\right], & 当\ t>x/c,\\ \dfrac{2}{\omega^2}\psi(t), & 当\ t\leqslant x/c.\end{cases}$$

11.9　卷积及其拉普拉斯变换

函数

$$f*g(t)=\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{11.9.1}$$

称为函数 $f(t)$和 $g(t)$的卷积.

定理 11.9.1（卷积定理）　如果 $F(s)$与 $G(s)$分别是 $f(t)$与 $g(t)$的拉普拉斯变换，那么卷积 $f*g(t)$的拉普拉斯变换是乘积 $F(s)G(s)$.

证明

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f*g]&=\int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty\int_0^t e^{-st}f(t-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

这个积分的积分区域如图 11.4 所示.交换积分次序，就有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f*g]&=\int_0^\infty\int_\xi^\infty e^{-st}f(t-\xi)g(\xi)\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi\\&=\int_0^\infty g(\xi)\int_\xi^\infty e^{-st}f(t-\xi)\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

如果在积分号内的积分中引进新变量 $\eta=t-\xi$，即得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f*g]&=\int_0^\infty g(\xi)\int_0^\infty e^{-s(\xi+\eta)}f(\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi\\&=\int_0^\infty g(\xi)e^{-s\xi}\mathrm{d}\xi\int_0^\infty f(\eta)e^{-s\eta}\mathrm{d}\eta\\&=F(s)G(s).\end{aligned}$$

本定理证毕.

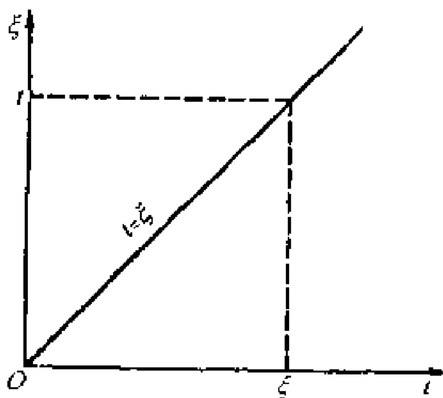


图 11.4

卷积有下列性质:

(1) $f * g = g * f$ (交换律);

(2) $f * (g * h) = (f * g) * h$ (结合律);

(3) $f * (g + h) = f * g + f * h$ (分配律).

【例 11.9.1】 求一半无限长的辐射杆的温度分布. 设在端点 $x = 0$ 处保持常温 u_0, 而另一端温度保持零度, 又初始温度分布等于零, 这时定解问题归结为

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} - h u, & 0 < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u_0, & \lim\limits_{x \to \infty} u(x,t) = 0, \end{cases}$$

其中 k, h 和 u_0 都是常数.

令 $U(x,s)$ 是 $u(x,t)$ 的拉普拉斯变换. 把方程和边界条件对 t 进行拉普拉斯变换, 得到

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 U}{dx^2} - \left(\dfrac{s - h}{k}\right) U = 0, \\ U(0,s) = u_0 / s, \\ \lim\limits_{x \to \infty} U(x,s) = 0. \end{cases}$$

上面的常微分方程的解是

$$U(x,s) = A e^{\sqrt{\frac{s+h}{k}}x} + B e^{-\sqrt{\frac{s+h}{k}}x}.$$

由无穷远处的边界条件, 应有 $A = 0$. 再利用剩下的边界条件, 有

$$U(0,s) = B = u_0 / s.$$

因此,解 $U(x,s)$具有下列形式:

$$U(x,s)=(u_0/s)\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{s+h}{k}}x}.$$

由拉普拉斯变换表求得

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s+h}{k}}x}\right]=\frac{x\mathrm{e}^{ht-x^2/4kt}}{2\sqrt{\pi k t^3}}.$$

于是 $U(x,s)$的逆变换是

$$u(x,t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{u_0}{s}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s+h}{k}}x}\right].$$

由积分定理 11.8.5,就有

$$u(x,t)=\int_0^t\frac{u_0x\mathrm{e}^{-h\tau-x^2/4k\tau}}{2\sqrt{\pi k}\tau^{3/2}}\mathrm{d}\tau.$$

引进新变量 $\eta=x/2\sqrt{k\tau}$,可得

$$u(x,t)=\frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{kt}}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\eta^2+\frac{hx^2}{4k\eta^2}\right)}\mathrm{d}\eta.$$

当 $h=0$ 时,$u(x,t)$变为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{kt}}^{\infty}\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta\\&=\frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta-\frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{kt}}\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta\\&=u_0\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)\right]=u_0\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right),\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{erfc}(\alpha)$称为余误差函数,它和误差函数之间有下列关系式:

$$\mathrm{erf}(\alpha)+\mathrm{erfc}(\alpha)=1.$$

11.10 阶梯函数和脉冲函数的拉普拉斯变换

我们在前面已经定义了单位阶梯函数.现在我们来求它的拉普拉斯变换.由定义,

$$\mathscr{L}[u_a(t)]=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}u_a(t)\mathrm{d}t=\int_a^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-as}/s\quad(s>0).\tag{11.10.1}$$

定理 11.10.1 (第二位移定理) 如果 $F(s)$是 $f(t)$的拉普拉斯变换,那么

$$\mathscr{L}[u_a(t)f(t-a)] = \mathrm{e}^{-as}F(s).$$

证明

$$\mathscr{L}[u_a(t)f(t-a)] = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}u_a(t)f(t-a)\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^{\infty} \mathrm{e}^{-st}f(t-a)\mathrm{d}t.$$

引进新积分变量 $\xi = t - a$,就有

$$\mathscr{L}[u_a(t)f(t-a)] = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(\xi+a)s}f(\xi)\mathrm{d}\xi$$
$$= \mathrm{e}^{-as}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-as}F(s).$$

本定理证毕.

【例 11.10.1】 (a)设

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{当 } t < 2, \\ t-2, & \text{当 } t \geqslant 2, \end{cases}$$

求 $f(t)$的拉普拉斯变换.

应用定理 11.10.1 可得

$$\mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[u_2(t)(t-2)] = \mathrm{e}^{-2s}\mathscr{L}[t] = \mathrm{e}^{-2s}/s^2.$$

(b)求拉普拉斯变换

$$F(s) = \frac{1+\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}$$

的逆变换.

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}\right]$$
$$= t + u_2(t)(t-2)$$
$$= \begin{cases} t, & \text{当 } 0 \leqslant t < 2, \\ 2(t-1), & \text{当 } t \geqslant 2. \end{cases}$$

脉冲函数 $p(t)$的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}[p(t)] = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}p(t)\mathrm{d}t = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} h\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$
$$= h\left[-\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\right]_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} = \frac{h\mathrm{e}^{-as}}{s}(\mathrm{e}^{\varepsilon s} - \mathrm{e}^{-\varepsilon s})$$
$$= 2\,\frac{h\mathrm{e}^{-as}}{s}\sinh\varepsilon s. \tag{11.10.2}$$

如果选取 h 的值为 $1/2\varepsilon$,那么脉冲函数的积分为

$$I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\mathrm{d}t = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}\mathrm{d}t = 1.$$

于是这个特殊的脉冲函数当 $\varepsilon \to 0$ 时满足下面两个关系式：

$$\lim_{\varepsilon\to 0} p_\varepsilon(t) = 0, \quad t \neq a,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon) = 1.$$

这可以看成是狄拉克 δ 函数所满足的两个结果：

$$\begin{cases} \delta(t-a) = 0, \quad t \neq a, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\mathrm{d}t = 1. \end{cases} \tag{11.10.3}$$

因此我们可把 δ 函数的拉普拉斯变换定义为函数 $p_\varepsilon(t)$ 的拉普拉斯变换的极限，即

$$\mathscr{L}[\delta(t-a)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathscr{L}[p_\varepsilon(t)]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{e}^{-as}\frac{\sinh\varepsilon s}{\varepsilon s} = \mathrm{e}^{-as}. \tag{11.10.4}$$

如果 $a=0$，我们有

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = 1. \tag{11.10.5}$$

现在我们可以导出关于 δ 函数与任意一个连续函数 $f(t)$ 的乘积积分的一个非常有用的结果：

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t)\mathrm{d}t \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} p_\varepsilon(t)f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{f(t)}{2\varepsilon}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\cdot 2\varepsilon f(t^*) \\ &= f(a) \quad (\text{其中 } a-\varepsilon < t^* < a+\varepsilon). \end{aligned} \tag{11.10.6}$$

假定 $f(t)$ 是以 T 为周期的函数，并且在区间 $[0, T]$ 上分段连续，那么 $f(t)$ 的拉普拉斯变换是

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} \mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t.$$

如果引进新变量 $\xi = t - nT$，那么

$$\mathscr{L}[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-nTs}\int_0^T \mathrm{e}^{-s\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-nTs}F_1(s),$$

其中

$$F_1(s) = \int_0^T \mathrm{e}^{-s\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

是函数 f 在第一个周期 $[0,T]$ 上的有限拉普拉斯变换.因为上述级数是几何级数,所以我们得到周期函数的拉普拉斯变换

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{F_1(s)}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}. \qquad (11.10.7)$$

【例 11.10.2】 设函数

$$f(t)=\begin{cases}h, & 当\ 0<t<c,\\ -h, & 当\ c<t<2c,\end{cases}$$

而且

$$f(t+2c)=f(t)$$

(如图 11.5 所示),求 $f(t)$ 的拉普拉斯变换.

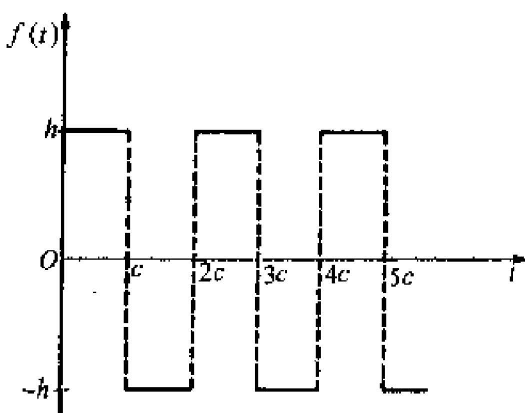


图 11.5

我们有

$$F_1(s)=\int_0^{2c}\mathrm{e}^{-s\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_0^{c}\mathrm{e}^{-s\xi}h\,\mathrm{d}\xi+\int_c^{2c}\mathrm{e}^{-s\xi}(-h)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{h}{s}(1-\mathrm{e}^{-cs})^2.$$

于是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换是

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{F_1(s)}{1-\mathrm{e}^{-2cs}}=\frac{h(1-\mathrm{e}^{-cs})^2}{s(1-\mathrm{e}^{-2cs})}$$

$$=\frac{h(1-\mathrm{e}^{-cs})}{s(1+\mathrm{e}^{-cs})}=\frac{h}{s}\tanh\frac{cs}{2}.$$

【例 11.10.3】 设有一长为 l 的均匀杆,在 $x=0$ 一端固定,在另一端 $x=l$ 处受外力

$$f(t)=\begin{cases}f_0, 当\ t>0,\\ 0,\ 当\ t<0\end{cases}$$

作用着，且杆在初始时刻是静止的.求杆在 $t>0$ 时的纵向位移.

这时杆的纵振动可归结为下列定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0, & u_x(l,t) = f_0/E, \end{cases}$$

其中 a, f_0 和 E 都是常数.

令 $U(x,s)$ 是 $u(x,t)$ 的拉普拉斯变换，那么 $U(x,s)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U}{dx^2} - \dfrac{s^2}{a^2}U = 0, \\ U(0,s) = 0, \\ \dfrac{dU}{dx}(l,s) = f_0/Es. \end{cases}$$

上述常微分方程的解是

$$U(x,s) = Ae^{xs/a} + Be^{-xs/a}.$$

利用两个边界条件，我们有

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ \left(\dfrac{s}{a}e^{ls/a}\right)A + \left(-\dfrac{s}{a}e^{-ls/a}\right)B = f_0/Es. \end{cases}$$

从上面这两个代数方程可解得

$$A = -B = \frac{af_0}{Es^2(e^{ls/a} + e^{-ls/a})}.$$

因此 $U(x,s)$ 为

$$U(x,s) = \frac{af_0(e^{xs/a} - e^{-xs/a})}{Es^2(e^{ls/a} + e^{-ls/a})}.$$

在求 $U(x,s)$ 的逆变换前，先把上式的分子和分母都乘以 $(e^{-ls/a} - e^{-3ls/a})$. 于是我们有

$$U(x,s) = \frac{af_0}{Es^2}\left[e^{-(l-x)s/a} - e^{-(l+x)s/a} - e^{-(3l-x)s/a} + e^{-(3l+x)s/a}\right] \cdot \frac{1}{1 - e^{-4ls/a}}.$$

因为 $U(x,s)$ 的分母上有 $1 - e^{-4ls/a}$ 这一项，所以逆变换 $u(x,t)$ 是以 $4l/a$ 为周期的函数. 因此定解问题的解最后可写成下列形式：

$u(x,t)$

$$
=\begin{cases}
0, & \text{当 } 0 < t < \dfrac{l-x}{a},\\
\dfrac{af_0}{E}\left(t-\dfrac{l-x}{a}\right), & \text{当 } \dfrac{l-x}{a} < t < \dfrac{l+x}{a},\\
\dfrac{af_0}{E}\left[\left(t-\dfrac{l-x}{a}\right)-\left(t-\dfrac{l+x}{a}\right)\right], & \text{当 } \dfrac{l+x}{a} < t < \dfrac{3l-x}{a},\\
\dfrac{af_0}{E}\left[\left(t-\dfrac{l-x}{a}\right)-\left(t-\dfrac{l+x}{a}\right)\right. & \\
\left.-\left(t-\dfrac{3l-x}{a}\right)\right], & \text{当 } \dfrac{3l-x}{a} < t < \dfrac{3l+x}{a},\\
\dfrac{af_0}{E}\left[\left(t-\dfrac{l-x}{a}\right)-\left(t-\dfrac{l+x}{a}\right)\right. & \\
\left.-\left(t-\dfrac{3l-x}{a}\right)+\left(t-\dfrac{3l+x}{a}\right)\right], & \text{当 } \dfrac{3l+x}{a} < t < \dfrac{4l}{a},
\end{cases}
$$

或可简化为

$$
u(x,t)=\begin{cases}
0, & \text{当 } 0 < t < (l-x)/a,\\
\dfrac{af_0}{E}\left(t-\dfrac{l-x}{a}\right), & \text{当 } (l-x)/a < t < (l+x)/a,\\
\dfrac{af_0}{E}\left(\dfrac{2x}{a}\right), & \text{当 } (l+x)/a < t < (3l-x)/a,\\
\dfrac{af_0}{E}\left(-t+\dfrac{3l+x}{a}\right), & \text{当 } (3l-x)/a < t < (3l+x)/a,\\
0, & \text{当 } (3l+x)/a < t < 4l/a.
\end{cases}
$$

这个结果可以用图形清楚地表示出来(见图 11.6).

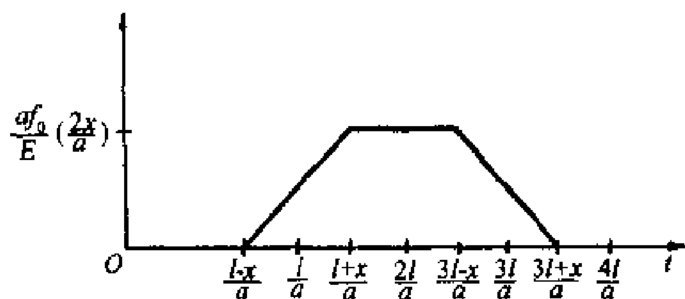


图 11.6

【例 11.10.4】 考察一根半无限长的弦,在 $x=0$ 一端固定,弦在初始时刻是静止的,且有一外力

$$f(x,t) = -f_0\delta\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

作用在弦上.这个外力是一个作用在点 $x = vt$ 上的集中力 f_0.

这根弦的振动可归结为下列定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} - f_0\delta\left(t - \dfrac{x}{v}\right), 0 < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0, \text{当 } x \to \infty \text{ 时}, u \text{ 有界}. \end{cases}$$

令 $U(x,s)$是 $u(x,t)$的拉普拉斯变换.把弦振动方程对 t 进行拉普拉斯变换并利用初始条件,得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2} - \frac{s^2}{c^2}U = \frac{f_0}{c^2}\mathrm{e}^{-xs/v}.$$

这个常微分方程的解是

$$U(x,s) = A\mathrm{e}^{sx/c} + B\mathrm{e}^{-sx/c} + \begin{cases} \dfrac{f_0 v^2 \mathrm{e}^{-sx/v}}{(c^2 - v^2)s^2}, & \text{当 } v \neq c, \\ -\dfrac{f_0 x\mathrm{e}^{-sx/c}}{2cs}, & \text{当 } v = c. \end{cases}$$

由 $u(x,t)$在无穷远处的有界性条件,应有 $A = 0$.利用条件

$$U(0,s) = 0$$

可得

$$B = \begin{cases} \dfrac{-f_0 v^2}{(c^2 - v^2)s^2}, & \text{当 } v \neq c, \\ 0, & \text{当 } v = c. \end{cases}$$

因此拉普拉斯变换 $U(x,s)$为

$$U(x,s) = \begin{cases} \dfrac{f_0 v^2(\mathrm{e}^{-xs/v} - \mathrm{e}^{-xs/c})}{(c^2 - v^2)s^2}, & \text{当 } v \neq c, \\ -\dfrac{f_0 x\mathrm{e}^{-sx/c}}{2cs}, & \text{当 } v = c. \end{cases}$$

所以 $U(x,s)$的逆变换是

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{f_0 v^2}{(c^2 - v^2)}\left[\left(t - \dfrac{x}{v}\right)u_a\left(t - \dfrac{x}{v}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. - \left(t - \dfrac{x}{c}\right)u_a\left(t - \dfrac{x}{c}\right)\right], & \text{当 } v \neq c, \\ \dfrac{-f_0 x}{2c}u_a\left(t - \dfrac{x}{c}\right), & \text{当 } v = c. \end{cases}$$

上面这些拉普拉斯变换的应用例子中，我们只讨论了拉普拉斯变换较为简单的问题. 这些拉普拉斯变换可以分解成部分分式并通过查表而求得逆变换. 但一般说来，讨论的问题需要利用拉普拉斯变换的反演公式. 如果 $F(s)$是实函数 $f(t)$的拉普拉斯变换，其中复变量 $s=r+\mathrm{i}\omega$，那么反演公式为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{r-\mathrm{i}\infty}^{r+\mathrm{i}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s.$$

11.11 格林函数

解非齐次偏微分方程的有用方法之一是在格林函数法中利用积分变换. 我们将通过下面的例子来说明这种方法.

【例 11.11.1】 考察一半无限长杆的热传导问题. 设杆中有热量产生，而且端点 $x=0$ 的温度变化规律和杆的初始温度都是已知的. 这个问题可归结为下列定解问题：

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=h(x,t), & x>0,t>0, \qquad (11.11.1)\\ u(x,0)=f(x), & x>0, \qquad (11.11.2)\\ u(0,t)=p(t), & t>0. \qquad (11.11.3)\end{cases}$$

在这种情况下，由第十章习题 1 可知

$$Mv=-v_t-v_{xx},$$

因此利用上一章的叠加方法，自由空间格林函数 F 应满足下列方程：

$$MF=-F_\tau-F_{\xi\xi}=\delta(\xi-x,\tau-t),\quad \tau>0,\ |\xi|<\infty.$$

(这里取(x,t)为源点.)

注意，这时函数 F 关于奇点(x,t)是不对称的，因而和拉普拉斯算子情形不同，F 并不是仅与径向距离有关的函数.

为了用格林函数法解定解问题(11.11.1)～(11.11.3)，我们考察下列方程和条件：

$$\begin{cases} LF=F_\tau-F_{\xi\xi}=\delta(\xi-x,\tau-t),\\ F(\xi,\tau;x,t)=0, \quad 当\ \tau<t.\end{cases}\qquad (11.11.4)$$

这时 F 在物理上可以解释为由于在点(x,t)处有单位热源所产生的温度分布，显然当 $\tau<t$ 时，热源的影响是不存在的. 因此 F 应当表示当 $\tau>t$ 时的热传导过程.

现在考察定解问题

$$\begin{cases} MF=-F_\tau-F_{\xi\xi}=\delta(\xi-x,\tau-t), \qquad (11.11.5)\\ F(\xi,\tau;x,t)=0, \quad 当\ \tau>t. \qquad (11.11.6)\end{cases}$$

这个定解问题和定解问题(11.11.4)除时间相反外是同样的.

我们先求自由空间格林函数 F. 把方程(11.11.5)对 ξ 进行傅里叶变换,得到

$$-\frac{\mathrm{d}F^*}{\mathrm{d}\tau}+\alpha^2F^*=\delta(\tau-t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}}{\sqrt{2\pi}},$$

其中 F^* 是 F 的傅里叶变换,α 是变换变量. 由条件(11.11.6),这个常微分方程的解是

$$F^*(\alpha,\tau;x,t)=\frac{H(t-\tau)}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x-\alpha^2(t-\tau)},$$

其中 H 是海维赛德阶梯函数,它的定义是

$$H(t-\tau)=\begin{cases}1, & \text{当 } t>\tau,\\ 0, & \text{当 } t<\tau.\end{cases} \tag{11.11.7}$$

于是求 F^* 的傅里叶逆变换,可得

$$\begin{aligned}F(\xi,\tau;x,t)&=\frac{H(t-\tau)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(x-\xi)-\alpha^2(t-\tau)}\mathrm{d}\alpha\\&=\frac{H(t-\tau)}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-(x-\xi)^2/4(t-\tau)}.\end{aligned} \tag{11.11.8}$$

为了确定解 $u(x,t)$,在第十章习题 1 的格林公式中取 $v=G$,得到

$$\begin{aligned}&\iint_R[GLu-uMG]\mathrm{d}R\\&=\int_{\partial R}[(uG_\xi-u_\xi G)\cos(n,\xi)+(uG)\cos(n,\tau)]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

在半无限区域中,把 $Lu=u_\tau-u_{\xi\xi}=h$ 和 $MG=-G_\tau-G_{\xi\xi}=\delta(\xi-x,\tau-t)$ 代入上式,并利用当 $\tau>t$ 时 $G=0,G_\xi=0$ 的条件,可得

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^t\int_0^\infty Gh\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau+\int_0^\infty f(\xi)G(\xi,0;x,t)\mathrm{d}\xi\\&\quad+\int_0^t p(\tau)G_\xi(0,\tau;x,t)\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{11.11.9}$$

我们假设格林函数 G 的形式为

$$G(\xi,\tau;x,t)=F(\xi,\tau;x,t)+g(\xi,\tau;x,t),$$

其中函数 g 可利用在点$(-x,t)$上放置负单位热源而得到. 于是,我们有

$$g(\xi,\tau;x,t)=-F(\xi,\tau;-x,t).$$

因为点$(-x,t)$不在区域的里面,显然由式(11.11.8)可知格林函数

$$G(\xi,\tau;x,t)=F(\xi,\tau;x,t)-F(\xi,\tau;-x,t) \tag{11.11.10}$$

满足下列方程和条件:

$$\begin{cases} MG = \delta(\xi - x, \tau \quad t), \\ G = 0, 在\ \xi = 0\ 上. \end{cases}$$

最后我们必须指出,在格林函数法中利用积分变换时,需要仔细考虑在积分定理中所加的条件.

有时,在一个问题中连续应用两个不同的积分变换是十分适合的.

习　题

1. 求函数 $f(x)=e^{-ax^2}$(a 是常数)的傅里叶变换.

2. 求函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 当\ |x| < a, \\ 0, & 当\ |x| \geqslant a \end{cases} \qquad (a\ 是正的常数)$$

的傅里叶变换.

3. 求函数 $f(x)=\frac{1}{|x|}$的傅里叶变换.

4. 求下列函数的傅里叶变换:

(a)　　$f(x)=\sin(x^2)$;

(b)　　$f(x)=\cos(x^2)$.

5. 证明

$$I = \int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} dx = \sqrt{\pi}/2a.$$

(提示:利用　$I^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-a^2(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-a^2r^2} r dr d\theta$.)

6. 证明

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos bx dx = (\sqrt{\pi}/2a) e^{-b^2/4a^2}.$$

(提示:令 $I(a,b) = \int_0^{\infty} e^{\ a^2x^2} \cos bx dx$,

因为

$$\frac{dI}{db} = -\frac{b}{2a^2} I,$$

所以

$$I = Ce^{-b^2/4a^2}.$$

因为

$$I(a,0) = C = \int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} dx = \sqrt{\pi}/2a,$$

所以

$$I(a,b) = (\sqrt{\pi}/2a) e^{-b^2/4a^2}).$$

7. 证明

$$\mathscr{F}[f(at-b)]=\frac{1}{|a|}e^{i\alpha b/a}F(\alpha/a).$$

8. 证明

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(-i\alpha)^n\mathscr{F}[f(t)].$$

9. 证明　(a)　$f*0=0*f=0$;

　　(b)　$f*1\neq f$.

10. 证明

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2t-i\alpha x}d\alpha=\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-x^2/4t}.$$

11. 求下列定解问题的解：

$$\begin{cases}u_{tt}=c^2u_{xx}, & -\infty<x<\infty,t>0,\\ u(x,0)=f(x),\\ u_t(x,0)=g(x).\end{cases}$$

解下列定解问题：

12. $$\begin{cases}u_t=u_{xx}, & x>0,t>0,\\ u(x,0)=0, & x>0,\\ u(0,t)=g(t), & t>0.\end{cases}$$

13. $$\begin{cases}u_t=u_{xx}, & x>0,\quad t>0,\\ u(x,0)=f(x), & x>0,\\ u_x(0,t)-hu(0,t)=0, & t>0,h>0.\end{cases}$$

14. $$\begin{cases}u_{tt}+a^2u_{xxxx}=0, & -\infty<x<\infty,t>0,\\ u(x,0)=f(x),\\ u_t(x,0)=0.\end{cases}$$

15. $$\begin{cases}u_{tt}+a^2u_{xxxx}=0, & x>0,t>0,\\ u(x,0)=0, & u_t(x,0)=0,\\ u(0,t)=g(t), & u_{xx}(0,t)=0.\end{cases}$$

16. $$\begin{cases}\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0, & -\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty,\\ \varphi_y(x,0)=\begin{cases}-\varphi_0, & \text{当 } 0<|x|<c,\\ 0, & \text{当 } |x|>c,\end{cases}\\ \lim\limits_{|y|\to\infty}\varphi(x,y)=0.\end{cases}$$

17. $$\begin{cases}u_t=u_{xx}, & -\infty<x<\infty,t>0,\\ u(x,0)=f(x),\\ u(x,t)\text{ 有界}.\end{cases}$$

18. $$\begin{cases}u_t-u_{xx}+hu=\delta(x)\delta(t), & -\infty<x<\infty,t>0,\\ u(x,0)=0,\\ \lim\limits_{|x|\to\infty}u(x,t)=0.\end{cases}$$

19. $\begin{cases} u_t - u_{xx} + v(t)u_x = \delta(x)\delta(t), & 0 < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u_x(0,t) = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty, \\ u(x,0) = f(x), \\ u_x(0,y) = g(y), \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,y) = \lim\limits_{y\to\infty} u(x,y) = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\infty < x < \infty, 0 < y < a, \\ u(x,0) = f(x), \quad u(x,a) = 0, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x,y) = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy}, & 0 < x < \infty, 0 < y < l, \\ u(x,y,0) = 0, \quad u(0,y,t) = 0, \\ u(x,0,t) = 0, \quad u(x,l,t) = 1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} u_t = u_{xx} - hu, & x > 0, t > 0, \text{其中 } h > 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u(0,t) = f(t). \end{cases}$

24. $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x > 0, 0 < y < l, \\ u(x,0) = f(x), \quad u(x,l) = 0, \\ u(0,y) = 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} u(x,y) = 0. \end{cases}$

25. 解定解问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, \\ u(x,t) \text{ 有界}, \end{cases}$$

并证明这个定解问题是适定的.

26. 求下列函数的拉普拉斯变换:

(a) t^n;　(b) $\cos\omega t$;　(c) $\sinh kt$;

(d) $\cosh kt$;　(e) te^{at};　(f) $e^{at}\sin\omega t$;

(g) $e^{at}\cos\omega t$;　(h) $t\sinh kt$;　(i) $t\cosh kt$;

(j) $\sqrt{\dfrac{1}{t}}$;　(k) $\sqrt{t}$;　(l) $\dfrac{\sin at}{t}$.

27. 求下列函数的拉普拉斯逆变换:

(a) $\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+2)}$;　(b) $\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+2)}$;　(c) $\dfrac{1}{(s-1)(s-2)}$;

(d) $\dfrac{1}{s(s+1)^2}$;　(e) $\dfrac{1}{s(s+1)}$;　(f) $\dfrac{s-4}{(s^2+4)^2}$.

28. 求下列函数的拉普拉斯变换:

(a) $f(t) = \begin{cases} t, & \text{当 } 0<t<b, \\ 2b-t, & \text{当 } b<t<2b. \end{cases}$

$$f(t+2b)=f(t);$$

(b) $f(t)=\begin{cases}h, & \text{当 } 0<t<b,\\ 0, & \text{当 } b<t<2b,\end{cases}$

$$f(t+2b)=f(t);$$

(c) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & \text{当 } 0<t<\pi,\\ 0, & \text{当 } \pi<t<2\pi,\end{cases}$

$$f(t+2\pi)=f(t);$$

(d) $f(t)=ht/b,\quad 0<t<b,$

$$f(t+b)=f(t);$$

(e) $f(t)=hnb,\quad nb<t<(n+1)b\ (n=0,1,2,\cdots).$

29. 证明卷积的下列性质：

(a) $f*g=g*f$;

(b) $f*(g*h)=(f*g)*h$;

(c) $f*(g+h)=f*g+f*h$;

(d) $f*0=0*f$.

30. 求下列定解问题的解：

$$\begin{cases}u_{tt}=c^2u_{xx}, & 0<x<\infty, t>0,\\ u(x,0)=f(x), & u_t(x,0)=0,\\ u(0,t)=0, & \lim\limits_{x\to\infty}u(x,t)=0.\end{cases}$$

解下列定解问题：

31. $$\begin{cases}u_{tt}=c^2u_{xx}, & 0<x<l, t>0,\\ u(x,0)=0, & u_t(x,0)=0,\\ u(0,t)=0, & u_x(l,t)=\cos\omega t.\end{cases}$$

32. $$\begin{cases}u_{tt}=c^2u_{xx}, & 0<x<\infty, t>0,\\ u(x,0)=0, & u_t(x,0)=0,\\ u(0,t)=\sin\omega t, & \lim\limits_{x\to\infty}u(x,t)=0.\end{cases}$$

33. $$\begin{cases}u_{tt}=c^2u_{xx}, & 0<x<l, t>0,\\ u(x,0)=0, & u_t(x,0)=0,\\ u(0,t)=0, & u(l,t)=f(t).\end{cases}$$

34. $$\begin{cases}u_t=ku_{xx}, & 0<x<\infty, t>0,\\ u(x,0)=f_0,\\ u(0,t)=f_1,\\ \lim\limits_{x\to\infty}u(x,t)=f_0.\end{cases}$$

35. $$\begin{cases} u = ku_{xx}, & 0<x<\infty, t>0, \\ u(x,0)=x, \\ u(0,t)=a, \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t)=x. \end{cases}$$

36. $$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0<x<\infty, t>0, \\ u(x,0)=0, \\ u(0,t)=t^2, \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t)=0. \end{cases}$$

37. $$\begin{cases} u_t = ku_{xx} - hu, & 0<x<\infty, t>0, \\ u(x,0)=f_0, \\ u(0,t)=0, \\ \lim\limits_{x\to\infty} u_x(x,t)=0. \end{cases}$$

38. $$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + bu, & 0<x<\infty, t>0, \\ u(x,0)=f_0, \quad u_t(x,0)=0, \\ u(0,t)=0, \\ \text{当 } x\to\infty \text{ 时}, u(x,t) \text{有界}. \end{cases}$$

39. $$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0<x<\infty, t>0, \\ u(x,0)=0, \\ u(0,t)=f_0, \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t)=0. \end{cases}$$

40. $$\begin{cases} u_{tt} + au_t + bu = c^2 u_{xx}, & 0<x<\infty, t>0, \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \\ u(0,t)=f_0\sin\omega t, \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t)=0. \end{cases}$$

41. $$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0<x<l, t>0, \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \\ u(0,t)=0, \\ u_x(l,t)=hf(t) \quad (h \text{ 是常数}). \end{cases}$$

42. $$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0<x<\infty, t>0, \\ u(x,0)=0, & u_t(x,0)=f_0, \\ u(0,t)=0, \\ \lim\limits_{x\to\infty} u_x(x,t)=0. \end{cases}$$

43. $$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0<x<l, t>0, \\ u(x,0)=2x/l, & u_t(x,0)=0, \\ u(0,t)=0, & u_x(l,t)=0. \end{cases}$$

44. $$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0<x<\infty, t>0, \\ u(x,0) = e^{-x}, \\ u(0,t) = 0, \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = 0. \end{cases}$$

45. 求下列方程的自由空间格林函数:

(a) $MF = c^2 F_{\xi\xi} - F_{\tau\tau} = \delta(\xi - x, \tau - t), \quad \tau>0, |\xi|<\infty$;

(b) $MF = F_{\xi\xi} + \dfrac{1}{\kappa} F_\tau - \dfrac{1}{c^2} F_{\tau\tau} = \delta(\xi - x, \tau - t), \quad \tau>0, |\xi|<\infty$.

习 题 答 案

第一章

1. (a)线性,非齐次,二阶;(b)拟线性,一阶;(c)非线性,一阶;(d)线性,齐次,四阶;(e)线性,非齐次,二阶;(f)拟线性,三阶;(g)非线性,二阶.

5. $u(x,y)=f(x)\cos y+g(x)\sin y$.

6. $u(x,y)=f(x)\mathrm{e}^{-y}+g(y)$.

7. $u(x,y)=f_1(x+y)+f_2(3x+y)$.

第三章

1. (a) $x<0$,双曲型,

$$u_{\xi\eta}=\frac{1}{4}\left(\frac{\xi-\eta}{4}\right)^4-\frac{1}{2(\xi-\eta)}(u_\xi-u_\eta);$$

$x=0$,抛物型,原方程已是标准形式;

$x>0$,椭圆型,

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=\frac{\beta^4}{16}+\frac{1}{\beta}u_\beta;$$

(b) $y=0$,抛物型;$y\neq0$,椭圆型,

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=u_\alpha+\mathrm{e}^\alpha;$$

(d)处处抛物型,

$$u_{\eta\eta}=\frac{2\xi}{\eta^2}u_\xi+\frac{1}{\eta^2}\mathrm{e}^{\xi/\eta};$$

(f)处处椭圆型,

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=u-\frac{1}{\alpha}u_\alpha-\frac{1}{\beta}u_\beta;$$

(g)处处抛物型,

$$u_{\eta\eta}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2(\eta-\xi)}}[\sin^{-1}\mathrm{e}^{\eta-\xi}-u_\xi];$$

(h) $y=0$,抛物型;$y\neq0$,双曲型,

$$u_{\xi\eta}=\frac{1+\xi-\ln\eta}{\eta}u_\xi+u_\eta+\frac{1}{\eta}u.$$

2. (i) $u(x,y)=f(y/x)+g(y/x)\mathrm{e}^{-y}$;

(ii) $u(r,t)=(1/r)f(r+ct)+(1/r)g(r-ct)$.

3. (a) $\xi=(y-x)+\mathrm{i}\sqrt{2}x$, $\eta=(y-x)-\mathrm{i}\sqrt{2}x$, $\alpha=y-x$, $\beta=\sqrt{2}x$,

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=-\frac{1}{2}u_\alpha-2\sqrt{2}u_\beta-\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\beta/\sqrt{2}};$$

(b) $\xi = y + x$, $\eta = y$, $u_{\eta\eta} = -\dfrac{3}{2}u$;

(c) $\xi = y - x$, $\eta = y - 4x$, $u_{\xi\eta} = \dfrac{7}{9}(u_\xi + u_\eta) - \dfrac{1}{9}\sin[(\xi - \eta)/3]$;

(d) $\xi = y + \mathrm{i}x$, $\eta = y - \mathrm{i}x$, $\alpha = y$, $\beta = x$, 原方程已是标准形式;

(e) $\xi = x$, $\eta = x - y/2$, $u_{\xi\eta} = 18u_\xi + 17u_\eta - 4$;

(f) $\xi = y + x/6$, $\eta = y$, $u_{\xi\eta} = 6u - 6\eta^2$;

(g) $\xi = x$, $\eta = y$, 原方程已是标准形式;

(h) $\xi = x$, $\eta = y$, 原方程已是标准形式.

4. (i) $u(x,y) = f(x + cy) + g(x - cy)$;

(ii) $u(x,y) = f(x + \mathrm{i}y) + g(x - \mathrm{i}y)$;

(iii) $u(x,y) = (x - \mathrm{i}y)f_1(x + \mathrm{i}y) + f_2(x + \mathrm{i}y) + (x + \mathrm{i}y)f_3(x - \mathrm{i}y) + f_4(x - \mathrm{i}y)$;

(iv) $u(x,y) = f(y + x) + g(y + 2x)$;

(v) $u(x,y) = f(y) + g(y - x)$;

(vi) $u(x,y) = (-y/128)(y - x)(y - 9x) + f(y - 9x) + g(y - x)$.

5. (i) $v_{\xi\eta} = -(1/16)v$;　　(ii) $v_{\xi\eta} = (84/625)v$.

第四章

1. $u(x,t) = x^2 + \dfrac{1}{9}t^2 + 3\sin x \sin\dfrac{1}{3}t$.

2. $u(x,y) = \dfrac{1}{4}\sin(x + y) + \dfrac{3}{4}\sin\left(x - \dfrac{y}{3}\right) + xy + \dfrac{1}{3}y^2$.

3. $u(x,y) = \dfrac{1}{2}[\phi(x - \sin x + y) + \phi(x + \sin x - y)] + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x+\sin x-y}^{x-\sin x+y}\psi(s)\mathrm{d}s$.

4. $u(x,y,z,t) = x^3 + 3a^2xt^2 + y^2z + a^2zt^2$.

5. $u(x,y,t) = x^3 + 3a^2xt^2 + x^2y + a^2yt^2$.

6. $u(x,t) = t\sin x + \dfrac{1}{2}[\cos(x - t) + \cos(x + t)]$.

7. $u(x,t) = \dfrac{1}{4a^2}(2a - 1)\arctan(x + at) - \dfrac{1}{4a^2}(2a + 1)\arctan(x - at) + \dfrac{1}{2a^2}\arctan x$.

8. $u(x,y,z,t) = (x^2 + yz)t + yt^2$.

9. $u(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$.

10. $u(x,y) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n y^n$,

其中 $a_1 = 2$,　$a_{n+1} = \dfrac{(n+2)}{(n+1)^2}a_n$,　$n = 1,2,3,\cdots$.

第五章

1. (a) 分段连续, $f(1-) = 1$, $f(1+) = 0$;

(c) 分段连续, $f(1-) = 2$, $f(1+) = 1$;

(d) $f(x)$不是分段连续函数.

2. (a)既不是奇函数，也不是偶函数；(b)偶函数；(c)既不是奇函数，也不是偶函数；(d)奇函数；(e)偶函数；(f)奇函数；(g)偶函数；(h)奇函数.

6. (a)$2\pi/3$； (b)4π； (c)1； (d)非周期函数； (e)2π； (f)非周期函数.

12. (a)

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{h}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^2}[1 + (-1)^{k+1}]\cos kx + \frac{1}{\pi k}[h + (h+\pi)(-1)^{k+1}]\sin kx;$$

(b)
$$f(x) = \sin x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin kx;$$

(e)
$$f(x) = \frac{\sinh\pi}{\pi}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{1+k^2}(\cos kx - k\sin kx)\right].$$

13. (a)
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}\sin kx;$$

(b)
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k}\left[1 - 2(-1)^k + \cos\frac{k\pi}{2}\right]\sin kx;$$

(c)
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{2(-1)^{k+1}\frac{\pi}{k} + \frac{4}{\pi k^3}[(-1)^k - 1]\right\}\sin kx;$$

(d)
$$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k}{\pi}\left[\frac{1+(-1)^k}{k^2-1}\right]\sin kx.$$

14. (a)
$$f(x) = \frac{3}{2}\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k - 1]\cos kx;$$

(b)
$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k - 1]\cos kx;$$

(c)
$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2}\cos kx;$$

(d)
$$f(x) = \frac{2}{3\pi} + \sum_{k=1,2,4,\cdots}^{\infty} \frac{6}{\pi}\left[\frac{1+(-1)^k}{9-k^2}\right]\cos kx.$$

15. (b)
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\cos\frac{k\pi x}{6};$$

(c)
$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\left[\frac{1+(-1)^k}{1-k^2}\right]\cos\frac{k\pi x}{l};$$

(f)
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{1+k^2\pi^2}(-1)^{k+1}(e - e^{-1})\sin k\pi x.$$

16. (a)
$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2+ik}{\pi(4+k^2)}(-1)^k\sinh 2\pi e^{ikx};$$

(b)
$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi(1-k^2)}\sinh\pi e^{ikx};$$

(d)
$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k\frac{i}{k\pi}e^{ik\pi x}.$$

17.(a) $$\sin^2 x = \sum_{k=1,3,4,\cdots}^{\infty} \frac{4(1-\cos k\pi)}{k\pi(4-k^2)}\sin kx;$$

(b) $$\cos^2 x = \sum_{k=1,3,4,\cdots}^{\infty} \frac{2(1-k^2)}{k\pi(4-k^2)}(1-\cos k\pi)\sin kx;$$

(c) $$\sin x\cos x = \sum_{k=1,3,4,\cdots}^{\infty} \frac{2(1-\cos k\pi)}{\pi(4-k^2)}\cos kx.$$

18.(a) $$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\cos kx;$$

(c) $$\int_0^{\infty} \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)dx = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k^2};$$

(e) $$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \begin{cases} -x, & \text{当 } -\pi < x < 0, \\ x, & \text{当 } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

19.(b)

$$f(x) = \frac{\pi}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi k^2}[(-1)^k - 1]\cos kx + \frac{(-1)^{k+1}}{2k}\sin kx.$$

20.(a) $$f(x) = \frac{l^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} 4(-1)^k\left(\frac{l}{k\pi}\right)^2\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

24.(a)

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \sin x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^5-n}\sin nx,\ -\pi < x < \pi.$$

32.(a) $$f(x,y) = \sum_{m=1,3,\cdots}^{\infty}\ \sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{mn}\sin mx\sin ny;$$

(c) $$f(x,y) = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8}{3}\pi^2\frac{(-1)^m}{m^2}\cos mx + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{3}\pi^2\frac{(-1)^n}{n^2}\cos ny + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16(-1)^{m+n}}{m^2n^2}\cos mx\cos ny;$$

(e) $$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m+1}}{m}\sin mx\sin y.$$

第六章

1.(a) $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n]\cos n\pi ct\sin n\pi x;$$

(c) $$u(x,t) = \cos\frac{\pi ct}{2}\sin\frac{\pi x}{2}.$$

2.(a) $$u(x,t) = \sum_{n=1,3,4,\cdots}^{\infty}\frac{32[(-1)^n-1]}{\pi cn^2(n^2-4)}\sin nct\sin nx;$$

(c) $$u(x,t) = \sum_{n=1,3,4,\cdots}^{\infty}\frac{2[1-(-1)^n]}{\pi c(n^2-4)}\sin nct\sin nx.$$

3.(a) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n]\cos n\pi ct\right.$

$\left.+\frac{18}{(n\pi)^2 c}[1-(-1)^n]\sin n\pi ct\right\}\sin n\pi x;$

(b) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8n}{\pi(4n^2-1)}\cos 2nct\right.$

$\left.+\frac{5}{n^2\pi c}(1-\cos n\pi)\sin 2nct\right]\sin 2nx.$

4.(a) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2\left[\pi^2-\frac{4}{(2n-1)^2}\right]$

$\cdot\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}\cos\frac{(2n-1)ct}{2}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x.$

5. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,$$

$$T_n(t)=\begin{cases}e^{-at/2}\left(\cosh\alpha t+\frac{a}{2\alpha}\sinh\alpha t\right), & \text{当 } \alpha>0,\\ e^{-at/2}\left(1+\frac{at}{2}\right), & \text{当 } \alpha=0,\\ e^{-at/2}\left(\cos\beta t+\frac{a}{2\beta}\sin\beta t\right), & \text{当 } \alpha<0;\end{cases}$$

其中

$$\alpha=\frac{1}{2}\left[a^2-4\left(b+\frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}\right)\right]^{1/2},$$

$$\beta=\frac{1}{2}\left[4\left(b+\frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}\right)-a^2\right]^{1/2}.$$

6. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,$$

$$T_n(t)=\begin{cases}\frac{2e^{-at/2}}{\sqrt{a^2-\alpha}}\sinh\frac{\sqrt{a^2-\alpha}}{2}t, & \text{当 } a^2>\alpha,\\ te^{-at/2}, & \text{当 } a^2=\alpha,\\ \frac{2e^{-at/2}}{\sqrt{\alpha-a^2}}\sin\frac{\sqrt{\alpha-a^2}}{2}t, & \text{当 } a^2<\alpha;\end{cases}$$

其中

$$\alpha=\left(\frac{2cn\pi}{l}\right)^2.$$

7. $$\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos a\alpha_n t\sin(\alpha_n x+\phi_n),$$

这里

$$a_n=\frac{2(\alpha_n^2+h^2)}{2h+(\alpha_n^2+h^2)l}\int_0^l f(x)\sin(\alpha_n x+\phi_n)\mathrm{d}x,$$

$$\phi_n=\arctan\frac{\alpha_n}{h};$$

其中 α_n 是下列方程的根:

$$\tan\alpha l=\frac{2h\alpha}{\alpha^2-h^2}.$$

11. $u(x,t)=v(x,t)+U(x)$,

其中

$$v(x,t)=\left[\frac{-2}{l}\int_0^l U(\tau)\sin\frac{n\pi\tau}{l}\mathrm{d}\tau\right]\cos\frac{n\pi ct}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$U(x)=-\frac{A}{c^2}\sinh x+\left(\frac{A}{c^2}\sinh l+k-h\right)\frac{x}{l}+h.$$

12. $$u(x,t)=\frac{A}{6c^2}x^2(l-x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l(-1)^n}{(n\pi)^3}[6l^2+n^2\pi^2(1-l^2)]\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}.$$

14. $$u(x,t)=-\frac{hx^2}{2k}+\left(2u_0+\frac{h}{2k}\right)x-\frac{4h}{k\pi}e^{-k\pi^2 t}\sin\pi x+\sum_{n=2}^{\infty}a_n e^{-kn^2\pi^2 t}\sin n\pi x,$$

其中

$$a_n=\frac{2u_0}{n\pi}[1+(-1)^n]+\frac{2u_0 n}{(n^2-1)\pi}[1-(-1)^n]+\frac{2h}{k\pi^3n^3}[(-1)^n-1].$$

15.(a) $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3\pi^3}[2(-1)^{n+1}-1]e^{-4n^2\pi^2 t}\sin n\pi x;$$

(b) $$u(x,t)=\sum_{n=1,3,4,\cdots}^{\infty}[(-1)^n-1]\left[\frac{n}{\pi(4-n^2)}-\frac{1}{n\pi}\right]e^{-n^2kt}\sin nx.$$

16. $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l^2}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

18. $$v(x,t)=Ct\left(1-\frac{x}{l}\right)-\frac{Cl^2}{6k}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\left(\frac{x}{l}\right)\right]+\frac{2Cl^2}{\pi^3k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2\pi^2kt/l^2}}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

21. $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$,

其中

$$
\begin{aligned}
v(x,t) = {} & e^{-kt}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{n^2-1}e^{-n^2kt}\sin nx \\
& - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{\alpha^2 k}\left\{\frac{(-1)^n}{n}\left[1-\frac{1}{\pi}(e^{-\alpha\pi}-1)\right]\right. \\
& \left. + \frac{n}{n^2+\alpha^2}\left[1-(-1)^n e^{-\alpha\pi}\right]\right\}e^{-n^2kt}\sin nx,
\end{aligned}
$$

$$
w(x) = \frac{A}{\alpha^2 k}\left[1-e^{-\alpha x}+\frac{x}{\pi}(e^{-\alpha\pi}-1)\right].
$$

23. $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$
U_n(t) = \frac{lC_n}{n\pi a}\left[\frac{\omega}{\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\sin\frac{n\pi a}{l}t - \frac{\frac{n\pi a}{l}}{\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\sin\omega t\right],
$$

$$
C_n = \frac{2\omega}{lg}\int_0^l \Phi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,d\xi.
$$

24. $$
\begin{aligned}
u(x,t) = {} & \frac{2Al^3}{\pi^3 a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\left(1-\cos\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \\
& + \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\cos\frac{(2n-1)\pi a}{l}t\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi}{l}x.
\end{aligned}
$$

25. $$
\begin{aligned}
u(x,t) = {} & 3x\sin t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(-1)^{n+1}}{n\pi^2}\left[\frac{1}{2n\pi}(1-\cos 2n\pi t)\right. \\
& \left. + \frac{\sin 2n\pi t - 2n\pi\sin t}{1-4n^2\pi^2}\right]\sin n\pi x \\
& + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{32[1-(-1)^n]}{n^3\pi^3}\cos 2n\pi t + \frac{3(-1)^n}{n^2\pi^2}\sin 2n\pi t\right\}\sin n\pi x.
\end{aligned}
$$

26. $$u(x,t) = \frac{1}{6a^2}(l^3-x^3) + \sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{-\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right]^2 t}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x,$$

其中

$$
\begin{aligned}
c_n = {} & \frac{(-1)^n l^3}{3a^2}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi} - \frac{12}{(2n+1)^2\pi^2} + \frac{48}{(2n+1)^3\pi^3}\right] \\
& + \frac{16l^3}{3a^2(2n+1)^4\pi^4}.
\end{aligned}
$$

第七章

1. (a) $\lambda_n = n^2$, $u_n(x) = \sin nx$，其中 $n = 1,2,3,\cdots$；

   (b) $\lambda_n = [(2n-1)/2]^2$, $u_n(x) = \sin[(2n-1)/2]\pi x$，其中 $n = 1,2,3,\cdots$；

   (c) $\lambda_n = n^2$, $u_n(x) = \cos nx$，其中 $n = 1,2,3,\cdots$.

2. (a) $\lambda_n = 0, n^2\pi^2$, $u_n(x) = 1, \sin n\pi x, \cos n\pi x$，其中 $n = 1,2,3,\cdots$；

(b) $\lambda_n=0,n^2,u_n(x)=1,\sin nx,\cos nx$,其中 $n=1,2,3,\cdots$;

(c) $\lambda_n=0,4n^2,u_n(x)=1,\sin 2nx,\cos 2nx$,其中 $n=1,2,3,\cdots$.

3. (a) $\lambda_n=-(3/4+n^2\pi^2),u_n(x)=e^{-x/2}\sin n\pi x$,其中 $n=1,2,3,\cdots$.

5. (a) $\lambda_n=1+n^2\pi^2,u_n(x)=(1/x)\sin(n\pi\ln x)$,其中 $n=1,2,3,\cdots$;

(b) $\lambda_n=\frac{1}{4}+(n\pi/\ln 3)^2,u_n(x)=[1/(x+2)^{1/2}]\sin[(n\pi/\ln 3)\ln(x+2)]$,其中 $n=1,2,3,\cdots$;

(c) $\lambda_n=\frac{1}{12}[1+(2n\pi/\ln 2)^2],u_n(x)=[1/(1+x)^{1/2}]\sin[(n\pi/\ln 2)\ln(1+x)]$,其中 $n=1,2,3,\cdots$.

6. (a) $\lambda>0,u(x)=\sin(\sqrt{\lambda}\ln x)$;

(b) $\lambda>0,u(x)=\sin\sqrt{\lambda}x$.

8.(b) $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right]\cos nx$.

9. (a) $G(x,\xi)=\begin{cases}x, & \text{当 } x\leqslant\xi,\\ \xi, & \text{当 } x>\xi;\end{cases}$

(b) $G(x,\xi)=\begin{cases}-\ln\xi, & \text{当 } x\leqslant\xi,\\ -\ln x, & \text{当 } x>\xi.\end{cases}$

10. (a) $u(x)=-\cos x+\left(\frac{\cos 1-1}{\sin 1}\right)\sin x+1$;

(b) $u(x)=-\frac{2}{5}\cos 2x-\frac{1}{10}\left(\frac{1+2\sin 2}{\cos 2}\right)\sin 2x+\frac{1}{5}e^x$.

11.(a) $u(x)=(3/2e)e^x+(e/2)e^{-x}-x$.

12. (a) $G(x,\xi)=\begin{cases}x^3\xi/2+x\xi^3/2-9x\xi/5+x, & \text{当 } 0\leqslant x<\xi,\\ x^3\xi/2+x\xi^3/2-9x\xi/5+\xi, & \text{当 } \xi\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$

(b) $G(x,\xi)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\ln|1-x||1+\xi|+\ln 2-\frac{1}{2}, & \text{当 } -1\leqslant x<\xi,\\ -\frac{1}{2}\ln|1+x||1-\xi|+\ln 2-\frac{1}{2}, & \text{当 } \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

13. (a) $u(x)=\lambda\int_0^1 K(x,\xi)u(\xi)d\xi$,

其中

$$K(x,\xi)=\begin{cases}\xi(1-x), & \text{当 } \xi<x,\\ x(1-\xi), & \text{当 } \xi>x;\end{cases}$$

(b) $u(x)=\lambda\int_0^x(\xi-x)u(\xi)d\xi+1$.

第八章

8. (a) $u(r,\theta)=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{r}-\frac{r}{4}\right)\sin\theta$;

(c) $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sinh\left[(n\pi/\ln 3)\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin[(n\pi/\ln 3)\ln r]$,

其中

$$a_n = \frac{2}{\ln3\sinh(n\pi^2/2\ln3)}\left\{\frac{n\pi\ln3}{n^2\pi^2+4(\ln3)^2}[9(-1)^n-1]\right.$$
$$\left.-\frac{4n\pi\ln3}{n^2\pi^2+(\ln3)^2}[3(-1)^n-1]+\frac{3\ln3}{n\pi}[(-1)^n-1]\right\}.$$

9. $$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r^{-n\pi/\alpha}-b^{-2n\pi/\alpha}r^{n\pi/\alpha})\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sinh\left[\frac{n\pi}{\ln(b/a)}(\theta-\alpha)\right]\sin\left[\frac{n\pi}{\ln(b/a)}(\ln r-\ln a)\right],$$

其中

$$a_n=\frac{2}{\alpha(a^{-n\pi/\alpha}-b^{-2n\pi/\alpha}a^{n\pi/\alpha})}\int_0^{\alpha}f(\theta)\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}d\theta,$$
$$b_n=\frac{-2}{\ln(b/a)\sinh[\alpha n\pi/\ln(b/a)]}\int_a^b\varphi(r)$$
$$\cdot\sin\left[\frac{n\pi}{\ln(b/a)}(\ln r-\ln a)\right]\frac{dr}{r}.$$

12. $$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\alpha J_\nu(a)}\left[\int_0^{\alpha}f(\tau)\sin\left(\frac{n\pi\tau}{\alpha}\right)d\tau\right]J_\nu(r)\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha},$$

其中

$$\nu=n\pi/\alpha.$$

13. $$u(r,\theta)=\frac{1}{2}(a^2-r^2).$$

14.(a) $$u(r,\theta)=-\frac{1}{3}\left(r+\frac{4}{r}\right)\sin\theta+C,$$

其中 C 是任意常数.

16. $$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}R^{1-n}}{n^2}r^n\sin n\theta.$$

18. $$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),$$

其中

$$a_n=\frac{R^{1-n}}{(n+Rh)\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta d\theta,n=0,1,2,\cdots,$$
$$b_n=\frac{R^{1-n}}{(n+Rh)\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta d\theta,n=1,2,3,\cdots.$$

20. $$u(r,\theta)=C-\frac{r^4}{12}\sin2\theta+\frac{1}{6}\left(\frac{r_1^6-r_2^6}{r_1^4-r_2^4}\right)r^2\sin2\theta$$
$$+\frac{1}{6}\left(\frac{r_1^2-r_2^2}{r_1^4-r_2^4}\right)r_1^4r_2^4r^{-2}\sin2\theta.$$

22.(a) $$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4[1-(-1)^n]}{(n\pi)^3\sinh n\pi}\sin n\pi x\sinh n\pi(y-1);$$

(c) $$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\sinh n\pi x-\tanh n\pi\cosh n\pi x)\sin n\pi y,$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\tanh n\pi}\left[\frac{2n\pi^3}{n^2\pi^4 - 4} + \frac{(-1)^n - 1}{n\pi}\right].$$

23.(a) $u(x,y) = C + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\cosh nx - \tanh n\pi \sinh nx)\cos ny$,

其中

$$a_n = 2[1-(-1)^n]/n^3\pi\tanh n\pi;$$

(c) $u(x,y) = -\frac{1}{\tanh\pi}[\cosh y - \tanh\pi \sinh y]\cos x + C$.

25. $u(x,y) = xy(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^3\sinh n\pi}\sin nx \sinh ny$.

27.

$$u(x,y) = C + (x^2/2)(x^2/3 - y^2) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4a^4(-1)^{n+1}}{(n\pi)^3\sinh n\pi}\cosh\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4a^4(-1)^{n+1}}{(n\pi)^3\sinh n\pi}\cos\frac{n\pi x}{a}\cosh\frac{n\pi y}{a}.$$

29. $u(x,y) = x[(x/2) - \pi] + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x\cosh\left(\frac{2n-1}{2}\right)y$,

这里

$$a_n = \frac{2}{A\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x) - h\left(\frac{x^2}{2} - \pi x\right)\right]\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x\,dx,$$

其中

$$A = \left(\frac{2n-1}{2}\right)\sinh\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi + h\cosh\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi.$$

第九章

1. $u(x,y,z) = \frac{\sinh[(\pi/b)^2 + (\pi/c)^2]^{1/2}(a-x)}{\sinh[(\pi/b)^2 + (\pi/c)^2]^{1/2}a}\sin\frac{\pi y}{b}\sin\frac{\pi z}{c}$.

2. $u(x,y,z) = \left[\frac{\sinh\sqrt{2}\pi z}{\sqrt{2}\pi} - \frac{\cosh\sqrt{2}\pi z}{\sqrt{2}\pi\tanh\sqrt{2}\pi}\right]\cos\pi x\cos\pi y$.

4.(a) $u(r,\theta,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta)$

$$\cdot J_m(\alpha_{mn}r/a)\frac{\sinh\alpha_{mn}(l-z)/a}{\sinh\alpha_{mn}l/a},$$

这里

$$a_{mn} = \frac{2}{a^2\pi\epsilon_n[J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a f(r,\theta)J_m(\alpha_{mn}r/a)\cos m\theta\, r\,dr\,d\theta,$$

$$b_{mn} = \frac{2}{a^2\pi[J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a f(r,\theta)J_m(\alpha_{mn}r/a)\sin m\theta\, r\,dr\,d\theta,$$

其中

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, \text{当 } m \neq 0, \\ 2, \text{当 } m = 0, \end{cases}$$

a_{mn}是方程$J_m(\alpha)=0$的第 n 个根.

5. $u(r,\theta)=\frac{1}{3}+(2/3a^2)r^2P_2(\cos\theta)$.

7. $u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sinh\alpha_n(l-z)/a}{\cosh\alpha_n l/a}J_0(\alpha_n r/a)$,

其中

$$a_n=\frac{2qa}{k\alpha_n^2J_1^2(\alpha_n)},$$

而 α_n 是方程$J_0(\alpha)=0$的第 n 个根.

8. $u(r,z)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_0[(2n+1)\pi r/l]}{I_0[(2n+1)\pi a/l]}\frac{\sin(2n+1)\pi z/l}{(2n+1)}$.

9. $u(r,\theta)=u_2+\frac{u_1-u_2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)P_{n-1}(0)\left(\frac{r}{a}\right)^nP_n(\cos\theta)$.

11. $u(r,\theta,\phi)=C+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}r^nP_n^m(\cos\theta)[a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi]$,

其中

$$a_{nm}=\frac{(2n+1)(n-m)!}{2n\pi(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

$$b_{nm}=\frac{(2n+1)(n-m)!}{2n\pi(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

$$a_{n0}=\frac{2n+1}{4n\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)P_n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

12.

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1,3,4,\cdots}\left(-\frac{4}{\pi}\right)\frac{[1-(-1)^n]}{n(n^2-4)}\cos\sqrt{n^2+1}\pi ct\sin n\pi x\sin\pi y.$$

13.

$$\begin{aligned}u(r,\theta,t)=&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}J_n(\alpha_{mn}r/a)\cos(\alpha_{mn}ct/a)[a_{mn}\cos n\theta+b_{mn}\sin n\theta]\\&+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}J_n(\alpha_{mn}r/a)\sin(\alpha_{mn}ct/a)\\&\cdot[c_{mn}\cos n\theta+d_{mn}\sin n\theta],\end{aligned}$$

这里

$$a_{mn}=\frac{2}{\pi a^2\varepsilon_n[J_n'(\alpha_{mn})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a f(r,\theta)J_n(\alpha_{mn}r/a)\cos n\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

$$b_{mn}=\frac{2}{\pi a^2[J_n'(\alpha_{mn})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a f(r,\theta)J_n(\alpha_{mn}r/a)\sin n\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

$$c_{mn}=\frac{2}{\pi ac\alpha_{mn}\varepsilon_n[J_n'(\alpha_{mn})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a g(r,\theta)J_n(\alpha_{mn}r/a)\cos n\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

$$d_{mn} = \frac{2}{\pi a c \alpha_{mn}[J_n'(\alpha_{mn})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a g(r,\theta)J_n(\alpha_{mn}r/a)\sin n\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,$$

其中 α_{mn} 是方程 $J_n(\alpha)=0$ 的第 m 个根,而

$$\varepsilon_n = \begin{cases}2, & 当\ n=0,\\ 1, & 当\ n\neq 0.\end{cases}$$

15. $u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}J_n(\alpha_{mn}r)\mathrm{e}^{-k\alpha_{mn}^2 t}[a_{nm}\cos n\theta + b_{nm}\sin n\theta]$,

这里

$$a_{nm} = \frac{2}{\pi\varepsilon_n[J_n'(\alpha_{mn})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r,\theta)J_n(\alpha_{mn}r)\cos n\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,$$

$$b_{nm} = \frac{2}{\pi[J_n'(\alpha_{mn})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r,\theta)J_n(\alpha_{mn}r)\sin n\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,$$

其中 α_{mn} 是方程 $J_n(\alpha)=0$ 的第 m 个根,而

$$\varepsilon_n = \begin{cases}1, & 当\ n\neq 0,\\ 2, & 当\ n=0.\end{cases}$$

16. $u(x,y,z,t)=\sin\pi x\sin\pi y\sin\pi z\cos\sqrt{3}\pi ct$.

18.

$$\begin{aligned}u(r,\theta,z,t) = &\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}J_n(\alpha_{mn}r/a)\sin(p\pi z/l)\cos\omega ct\\ &\cdot[a_{nmp}\cos n\theta + b_{nmp}\sin n\theta]\\ &+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}J_n(\alpha_{mn}r/a)\sin(p\pi z/l)\sin\omega ct\\ &\cdot[c_{nmp}\cos n\theta + d_{nmp}\sin n\theta],\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}a_{nmp} = &\frac{4}{\pi a^2 l\varepsilon_n[J_n'(\alpha_{mn})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^l f(r,\theta,z)\\ &\cdot J_n(\alpha_{mn}r/a)\sin(p\pi z/l)\cos n\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_{nmp} = &\frac{4}{\pi a^2 l[J_n'(\alpha_{mn})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^l f(r,\theta,z)\\ &\cdot J_n(\alpha_{mn}r/a)\sin(p\pi z/l)\sin n\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{nmp} = &\frac{4\omega^{-1}}{\pi a^2 l\varepsilon_n[J_n'(\alpha_{mn})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^l g(r,\theta,z)\\ &\cdot J_n(\alpha_{mn}r/a)\sin(p\pi z/l)\cos n\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{nmp} = &\frac{4\omega^{-1}}{\pi a^2 l[J_n'(\alpha_{mn})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^l g(r,\theta,z)\\ &\cdot J_n(\alpha_{mn}r/a)\sin(p\pi z/l)\sin n\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

其中 α_{mn} 是方程 $J_n(\alpha)=0$ 的第 m 个根,而

$$\omega = [(p\pi/l)^2 + (\alpha_{mn}/a)^2]^{1/2}, \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{当 } n \neq 0, \\ 2, & \text{当 } n = 0. \end{cases}$$

20.
$$u(r,\theta,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}[a_{nmp}\cos n\theta + b_{nmp}\sin n\theta] \cdot J_n(\alpha_{mn}r/a)\sin(p\pi z/l)e^{-\omega kt},$$

这里

$$a_{nmp} = \frac{4}{\pi a^2 l\varepsilon_n[J_n'(\alpha_{mn})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^l f(r,\theta,z) \cdot J_n(\alpha_{mn}r/a)\sin(p\pi z/l)\cos n\theta r\,dr\,d\theta\,dz,$$

$$b_{nmp} = \frac{4}{\pi a^2 l[J_n'(\alpha_{mn})]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^l f(r,\theta,z) \cdot J_n(\alpha_{mn}r/a)\sin(p\pi z/l)\sin n\theta r\,dr\,d\theta\,dz,$$

其中 α_{nm} 是方程 $J_n(\alpha)=0$ 的第 m 个根,而

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{当 } n \neq 0, \\ 2, & \text{当 } n = 0, \end{cases} \quad \omega = [(p\pi/l)^2 + (\alpha_{mn}/a)^2].$$

23.
$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(t)\sin mx\sin ny,$$

其中

$$u_{mn}(t) = \frac{4(-1)^{m+n+1}}{mn\alpha_{mn}c}\left\{\sin\alpha_{mn}ct\left[\frac{\cos(1-\alpha_{mn}c)t - 1}{2(1-\alpha_{mn}c)} + \frac{\cos(1+\alpha_{mn}c)t - 1}{2(1+\alpha_{mn}c)}\right] + \cos\alpha_{mn}ct\left[\frac{\sin(1-\alpha_{mn}c)t}{2(1-\alpha_{mn}c)} + \frac{\sin(1+\alpha_{mn}c)t}{2(1+\alpha_{mn}c)}\right]\right\},$$

$$\alpha_{mn} = (m^2+n^2)^{1/2}.$$

25.
$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4A[(-1)^n-1]^2}{mn\pi^2 k(n^2+m^2)}[1-e^{-k(n^2+m^2)t}] \cdot \sin nx(\sin my - m\cos my).$$

27.

$$u(x,y,t) = x(x-\pi)\left(1-\frac{y}{\pi}\right)\sin t + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} v_{mn}(t)\sin nx\sin my,$$

其中

$$v_{mn}(t) = \frac{8e^{-c^2\alpha_{mn}^2 t}[1-(-1)^n]}{\pi\alpha_{mn}^2(1+c^4\alpha_{mn}^4)}\left[\frac{c^2}{n^2}(\alpha_{mn}^2 - n^2)(\cos t e^{c^2\alpha_{mn}^2 t} - 1) + \left(\frac{1}{n^2} + c^4\alpha_{mn}^2\right)\sin t e^{c^2\alpha_{mn}^2 t}\right],$$

$$\alpha_{mn}^2 = m^2 + n^2.$$

30.

$$u(x,y,t) = \frac{4qb^4}{\pi^5 D}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\left[1 - \frac{v_n(x)}{1+\cosh(n\pi a/b)}\right]\sin(n\pi y/b),$$

其中

$$v_n(x)=2\cosh\frac{n\pi a}{2b}\cosh\frac{n\pi x}{b}+\frac{n\pi a}{2b}\sinh\frac{n\pi a}{2b}\cosh\frac{n\pi x}{b}$$
$$-\frac{n\pi x}{b}\sinh\frac{n\pi x}{b}\cosh\frac{n\pi a}{2b}.$$

第十章

3. $u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\rho^2-1)f(\beta)\mathrm{d}\beta}{1-\rho^2-2\rho\cos(\beta-\theta)}.$

7.

$$u(x,y)=-\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh(n\pi y/b)}{\sinh(n\pi a/b)}\left[\sinh\frac{n\pi}{b}(a-x)\int_0^x f(\xi)\sinh\frac{n\pi\xi}{b}\mathrm{d}\xi\right.$$
$$\left.+\sinh\frac{n\pi x}{b}\int_x^a f(\xi)\sinh\frac{n\pi}{b}(a-\xi)\mathrm{d}\xi\right].$$

8. $u(r,\theta)=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(R/\xi_{nk})^2J_n(\xi_{nk}r/R)(A_{nk}\cos n\theta+B_{nk}\sin n\theta),$

这里

$$A_{0k}=\frac{1}{\pi k^2J_1^2(\xi_{0k})}\int_0^R\int_0^{2\pi}rf(r,\theta)J_0(\xi_{0k}r/R)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$
$$A_{nk}=\frac{2}{\pi R^2J_{n+1}^2(\xi_{nk})}\int_0^R\int_0^{2\pi}rf(r,\theta)J_n(\xi_{nk}r/R)\cos n\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$
$$B_{nk}=\frac{2}{\pi R^2J_{n+1}^2(\xi_{nk})}\int_0^R\int_0^{2\pi}rf(r,\theta)J_n(\xi_{nk}r/R)\sin n\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

其中 ξ_{nk}是方程$J_n(\xi)=0$ 的第 k 个根，$n=1,2,3,\cdots;k=1,2,3,\cdots.$

9. $G(r,r')=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|r-r'|}}{|r-r'|}-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\rho-r'|}}{|\rho-r'|},$

其中

$$r=(\xi,\eta,\zeta),\qquad r'=(x,y,z),\qquad \rho=(\xi,\eta,-\zeta).$$

10. $G(r,r')=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|r-r'|}}{|r-r'|}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\rho-r'|}}{|\rho-r'|}.$

14. $G=-\frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{(\alpha^2a^2+n^2\pi^2)}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi\xi}{a}\sin\alpha y\sin\alpha\eta\mathrm{d}\alpha.$

16. $u(r,z)=\frac{2C}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{(k^2-\lambda^2-\beta^2)}J_0(\beta r)J_1(\beta a)\cos\lambda z\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\lambda.$

17. $u(r,\theta)=Ar^{1/2}\sin(\theta/2).$

18. $G=-\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\sigma y'\sinh\sigma(y-b)}{\sigma\sinh\sigma b}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x'}{a},$

其中

$$\sigma=\sqrt{[k^2+(n^2\pi^2/a^2)]},\quad 0<x'<x<a,0<y'<y<b.$$

第十一章

1. $F(\alpha)=\sqrt{1/(2a)}e^{-\alpha^2/4a}$.

2. $F(\alpha)=\sqrt{2/\pi}(\sin\alpha a)/\alpha$.

3. $F(\alpha)=1/|\alpha|$.

4. (a) $F(\alpha)=\sqrt{1/2}\sin(\alpha^2/4+\pi/4)$;

   (b) $F(\alpha)=\sqrt{1/2}\cos(\alpha^2/4-\pi/4)$.

11. $u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\tau)\mathrm{d}\tau$.

12. $u(x,t)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t g(\tau)(t-\tau)^{-3/2}e^{-x^2/4(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$.

14. $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos(a\xi^2t)e^{-i\xi x}\mathrm{d}\xi$.

15. $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x/\sqrt{2at}}^{\infty}g\left(\frac{t-x^2}{2a\xi^2}\right)\left(\sin\frac{\xi^2}{2}+\cos\frac{\xi^2}{2}\right)\mathrm{d}\xi$.

16. $u(x,t)=\frac{\varphi_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin c\xi}{\xi}\frac{e^{i\xi x}}{|\xi|}e^{-|\xi|y}\mathrm{d}\xi$.

17. $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-\xi)^2/4t}f(\xi)\mathrm{d}\xi$.

20. $$u(x,y)=\frac{2y}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(x^2+\tau^2+y^2)f(\tau)\mathrm{d}\tau}{[y^2+(x-\tau)^2][y^2+(x+\tau)^2]}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}g(\tau)\ln\frac{[x^2+(y+\tau)^2]}{[x^2+(y-\tau)^2]}\mathrm{d}\tau.$$

22. $$u(x,y,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi y}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n\pi x/l}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi y}{l}+\frac{4}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n\sin\frac{n\pi y}{l}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t(\xi^2+n^2\pi^2/l^2)}}{\xi(\xi^2+n^2\pi^2/l^2)}\sin\xi x\,\mathrm{d}\xi.$$

23. $u(x,t)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t f(\xi)(t-\xi)^{-3/2}e^{-h(t-\xi)-x^2/4(t-\xi)}\mathrm{d}\xi$.

24. $$u(x,y)=\frac{1}{2l}\sin\frac{\pi y}{l}\int_0^{\infty}f(\xi)\left[\frac{1}{\cos(l-y)\frac{\pi}{l}+\cosh(x-\xi)\frac{\pi}{l}}-\frac{1}{\cos(l-y)\frac{\pi}{l}+\cosh(x+\xi)\frac{\pi}{l}}\right]\mathrm{d}\xi.$$

27. (a) $\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$; (b) $\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t$;

   (c) $e^{2t}-e^t$; (d) $1-e^{-t}-te^{-t}$;

   (e) $1-e^{-t}$; (f) $t\cos 2t$.

28. (a) $\frac{1}{s^2}\tanh\frac{bs}{2}$;

(b) $\dfrac{h}{s(1+e^{-bs})}$;

(c) $\dfrac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$;

(d) $\dfrac{h}{bs^2}-\dfrac{he^{-bs}}{s(1-e^{-bs})}$;

(e) $\dfrac{he^{-bs}}{s(1-e^{-bs})}$.

30. $u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}[f(ct+x)-f(ct-x)], & 当\ t>x/c, \\ \dfrac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)], & 当\ t<x/c.\end{cases}$

32. $u(x,t)=\begin{cases}0, & 当\ t<x/c, \\ \sin\omega(t-x/c), & 当\ t\geqslant x/c.\end{cases}$

33. $u(x,t)=\begin{cases}0, & 当\ t<x/c, \\ f(t-x/c), & 当\ x/c<t\leqslant(l-x)/c.\end{cases}$

34. $u(x,t)=f_0+(f_1-f_0)\mathrm{erfc}(\sqrt{x^2/4kt})$.

35. $u(x,t)=(a-x)\mathrm{erfc}(x/\sqrt{4kt})+x$.

36. $u(x,t)=2\int_0^t\int_0^\eta \mathrm{erfc}(x/\sqrt{4k\xi})\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$.

37. $u(x,t)=f_0e^{-ht}[1-\mathrm{erfc}(x/\sqrt{4kt})]$.

39. $u(x,t)=f_0\mathrm{erfc}(x/\sqrt{4kt})$.

42. $u(x,t)=\begin{cases}f_0t, & 当\ t\leqslant x/c, \\ f_0x/c, & 当\ t\geqslant x/c.\end{cases}$

附录 I　伽马函数与误差函数

(1) 伽马函数

对任何 $x>0$,由广义积分

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \tag{1}$$

所表达的函数称为伽马函数.这个积分对所有的 $x>0$ 是收敛的,而且函数 $\Gamma(x)$当 $x>0$ 时是连续的.由定义可得下列关系式:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1)&=\int_0^{\infty} t^{x}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\&=\left[-t^{x}\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\infty}+x\int_0^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=x\Gamma(x).\end{aligned} \tag{2}$$

注意到

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1, \tag{3}$$

因而利用式(2)可得

$$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1\cdot 1=1!$$
$$\Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2\cdot 1=2!$$
$$\cdots\cdots$$

一般说来,有下列公式:

$$\Gamma(n+1)=n!,\quad n=1,2,3,\cdots. \tag{4}$$

如果把式(2)写成如下形式:

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}, \tag{5}$$

那么重复应用上式,得到

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+k)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)},\quad k=1,2,3,\cdots. \tag{6}$$

由式(6)可定义 $x<0$ 时的 $\Gamma(x)$,但当 x 为一切负整数时,由式(6)知 $\Gamma(x)$为无穷大.

当 $1<x<2$ 时,$\Gamma(x)$的值有表可查.由这些函数值,我们可对其他的 x 求得 $\Gamma(x)$的值.

例如

$$\Gamma(3.5)=(2.5)(1.5)\Gamma(1.5),$$

$$\Gamma(-1.4)=\frac{\Gamma(1.6)}{(-1.4)(-0.4)(0.6)},$$

其中 $\Gamma(1.5)=0.88623$,$\Gamma(1.6)=0.89352$.

(2) 误差函数

积分

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

称为误差函数.对于小的 x 值,其级数展开式为

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\cdots\right).$$

称

$$\operatorname{erfc}(x)=1-\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

为余误差函数.对此函数下式成立:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{erfc}(x)}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{x}}=1.$$

对于大的 x 值,余误差函数的渐近公式为

$$\operatorname{erfc}(x)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{x}\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{3\cdot 4}{(2x)^4}-\frac{4\cdot 5\cdot 6}{(2x)^6}+\cdots\right).$$

附录Ⅱ　傅里叶积分变换表

原象 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(p)e^{-ipx}dp$	变象 $F(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ipx}dx$
$\begin{cases} c & (a\leqslant x\leqslant b) \\ 0 & (x<a \text{ 或 } x>b) \end{cases}$	$\frac{ic}{\sqrt{2\pi}p}(e^{iap}-e^{ibp})$
$\begin{cases} x^n & (0\leqslant x\leqslant a) \\ 0 & (x<0 \text{ 或 } x>a) \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big\{n!\ (-ip)^{-(n+1)}-e^{iap}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}(-ip)^{k-(n+1)}a^k\Big\}$，其中 $n=1,2,3,\cdots$
$\begin{cases} e^{i\omega x} & (a<x<b) \\ 0 & (x<a \text{ 或 } x>b) \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{[e^{ia(\omega+p)}-e^{-ib(\omega+p)}]}{(p+\omega)}$
$\begin{cases} e^{-cx+i\omega x} & (x>0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}(\omega+p+ic)}$
$e^{-a\|x\|}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{(a^2+p^2)}$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{p^2}{4a}}$
$\cos ax^2$	$\sqrt{\frac{x}{2\pi a}}\cdot\cos\left(\frac{p^2}{4a}-\frac{\pi}{4}\right)$
$\sin ax^2$	$\sqrt{\frac{x}{2\pi a}}\cdot\sin\left(\frac{p^2}{4a}+\frac{\pi}{4}\right)$

续表

原象 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(p)e^{-ipx}dp$	变象 $F(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ipx}dx$
$\frac{1}{\|x\|}$	$\frac{1}{\|p\|}$
$\frac{1}{\|x\|^s}\quad(0<\mathrm{Re}\,s<1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(1-s)\cdot\sin\frac{\pi}{2}s}{\|p\|^{1-s}}$
$\frac{e^{-a\|x\|}}{\|x\|^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{[(a^2+p^2)^{\frac{1}{2}}+a]^{\frac{1}{2}}}{(a^2+p^2)^{\frac{1}{2}}}$
$\frac{\sin bx}{x}$	$\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}} & (\|p\|<b)\\ 0 & (\|p\|>b)\end{cases}$
$\frac{\sinh ax}{\sinh\pi x}(-\pi<a<\pi)$	$\frac{\sin a}{\sqrt{2\pi}(\cos a+\cosh p)}$
$\frac{\cosh ax}{\cosh\pi x}(-\pi<a<\pi)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\cos\frac{a}{2}\cdot\cosh\frac{p}{2}}{(\cos a+\cosh p)}$
$\begin{cases}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} & (\|x\|<a)\\ 0 & (\|x\|>a)\end{cases}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot J_0(ap)$
$\frac{\sin[b(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}]}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$	$\begin{cases}0 & (\|p\|>b)\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot J_0(a\sqrt{b^2-p^2}) & (\|p\|<b)\end{cases}$
$\begin{cases}\frac{\cos[b(a^2-x^2)]^{\frac{1}{2}}}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} & (\|x\|<a)\\ 0 & (\|x\|>a)\end{cases}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot J_0(a\sqrt{b^2+p^2})$
$\begin{cases}\frac{\cosh[b(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}]}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} & (\|x\|<a)\\ 0 & (\|x\|>a)\end{cases}$	$\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot J_0(a\sqrt{p^2-b^2}) & (\|p\|>b)\\ 0 & (\|p\|<b)\end{cases}$

附录Ⅲ　拉普拉斯积分变换表

原象 $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int F(p)e^{pt}dp$	变象 $F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$
1	$\frac{1}{p}$
t^n（n 是整数）	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^a(a>-1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\cosh\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$e^{-\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{-\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{-\lambda t}t^a(a>-1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{(p+\lambda)^{a+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-a\sqrt{p}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{2a\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{a^2}{p}}\text{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{p}}\right)$

续表

原象 $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int F(p)e^{pt}dp$	变象 $F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{a}{p}}$
$\mathrm{erf}(\sqrt{at})$	$\frac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}$
$\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}$
$e^{t}\mathrm{erfc}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{p+\sqrt{p}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-e^{t}\mathrm{erfc}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{1+\sqrt{p}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-at}+\sqrt{a}\,\mathrm{erf}(\sqrt{at})$	$\frac{\sqrt{p+a}}{p}$
$J_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
$J_\nu(at)$ $(\mathrm{Re}\nu>-1)$	$\frac{a^\nu}{\sqrt{a^2+p^2}}\left(\frac{1}{p+\sqrt{a^2+p^2}}\right)^\nu$
$\frac{J_\nu(at)}{t}$	$\frac{1}{\nu a^\nu}(\sqrt{p^2+a^2}-p)^\nu$
$e^{-at}I_0(\beta t)$	$\frac{1}{\sqrt{(p+a)^2-\beta^2}}$
$\lambda^\nu e^{-\lambda t}I_\nu(\lambda t)$	$\frac{[\sqrt{p^2+2\lambda p}-(p+\lambda)]^\nu}{\sqrt{p^2+2\lambda p}}$
$t^\nu J_\nu(at)\left(\mathrm{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{(2a)^\nu}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(p^2+a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}$
$J_0(2\sqrt{t})$	$\frac{2}{p}e^{-\frac{1}{p}}$
$t^{\frac{\nu}{2}}J_\nu(2\sqrt{t})$	$\frac{1}{p^{\nu+1}}e^{-\frac{1}{p}}$

续表

原象 $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int F(p)e^{pt}dp$	变象 $F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$
$\int_t^{\infty}\frac{J_0(\xi)}{\xi}d\xi$	$\frac{1}{p}\ln(p+\sqrt{p^2+1})$
$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\frac{p-a}{p-b}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\sin\sqrt{p}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\cos\sqrt{p}$
$\int_0^t\frac{\sin\xi}{\sqrt{2\pi\xi}}d\xi$	$\frac{1}{2\sqrt{2}pi}\frac{\sqrt{p+i}-\sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}}$
$\int_0^t\frac{\cos\xi}{\sqrt{2\pi\xi}}d\xi$	$\frac{1}{2\sqrt{2}p}\frac{\sqrt{p+i}+\sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}}$
$-\int_t^{\infty}\frac{\cos\xi}{\xi}d\xi$	$\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
$-\int_t^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi$	$\frac{\pi}{2p}-\frac{\tan^{-1}p}{p}$
$\int_t^{\infty}\frac{e^{-\xi}}{\xi}d\xi$	$\frac{1}{p}\ln(1+p)$

续表

原象 $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int F(p)e^{pt}dp$	变象 $F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$
$\int_t^{\infty}\frac{J_0(\xi)}{\xi}d\xi$	$\frac{1}{p}\ln(p+\sqrt{p^2+1})$
$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\frac{p-a}{p-b}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\sin\sqrt{p}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\cos\sqrt{p}$
$\int_0^t\frac{\sin\xi}{\sqrt{2\pi\xi}}d\xi$	$\frac{1}{2\sqrt{2}pi}\frac{\sqrt{p+i}-\sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}}$
$\int_0^t\frac{\cos\xi}{\sqrt{2\pi\xi}}d\xi$	$\frac{1}{2\sqrt{2}p}\frac{\sqrt{p+i}+\sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}}$
$-\int_t^{\infty}\frac{\cos\xi}{\xi}d\xi$	$\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
$-\int_t^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi$	$\frac{\pi}{2p}-\frac{\tan^{-1}p}{p}$
$\int_t^{\infty}\frac{e^{-\xi}}{\xi}d\xi$	$\frac{1}{p}\ln(1+p)$